ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

490

SYSTÈMES DE RÉFÉRENCE ET MOUVEMENTS

(Physique relativiste)

PAR

Augustin SESMAT

Professeur d'Histoire et de Critique des Sciences
à l'Institut Catholique de Paris

V

THEORIE RELATIVISTE DE LA GRAVITATION

PARIS
HERMANN & Cie, ÉDITEURS
6, Rue de la Sorbonne, 6

1937

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

PUBLIÉES SOUS LA DIRECTION DE MM.

René AUDUBERT
Directeur de Laboratoire à l'Ecole des Hautes Etudes
ÉLECTROCHIMIE THÉORIQUE

J.-P. BECQUEREL
Professeur au Muséum d'Histoire Naturelle
OPTIQUE ET MAGNÉTISME AUX TRÈS BASSES TEMPÉRATURES

G. BERTRAND
Membre de l'Institut
Professeur à l'Institut Pasteur
CHIMIE BIOLOGIQUE

L. BLARINGHEM
Membre de l'Institut
Professeur à la Sorbonne
BIOLOGIE VÉGÉTALE

Georges BOHN
Professeur à la Faculté des Sciences
ZOOLOGIE EXPÉRIMENTALE

J. BORDET
Prix Nobel
Directeur de l'Institut Pasteur de Bruxelles
MICROBIOLOGIE

J. BOSLER
Directeur de l'Observatoire de Marseille
ASTROPHYSIQUE

Léon BRILLOUIN
Professeur au Collège de France
THÉORIE DES QUANTA

Louis de BROGLIE
Membre de l'Institut
Professeur à la Sorbonne
Prix Nobel de Physique
I. PHYSIQUE THÉORIQUE
II. PHILOSOPHIE DES SCIENCES

Maurice de BROGLIE
De l'Académie Française et de l'Académie des Sciences
PHYSIQUE ATOMIQUE EXPÉRIMENTALE

D. CABRERA
Directeur de l'Institut de Physique et Chimie de Madrid
EXPOSÉS SUR LA THÉORIE DE LA MATIÈRE

E. CARTAN
Membre de l'Institut
Professeur à la Sorbonne
GÉOMÉTRIE

M. CAULLERY
Membre de l'Académie des Sciences
Professeur à la Faculté des Sciences
BIOLOGIE GÉNÉRALE

L. CAYEUX
Membre de l'Institut
Professeur au Collège de France
GÉOLOGIE

A. COTTON
Membre de l'Institut
Professeur à la Sorbonne
MAGNÉTO-OPTIQUE

Mme Pierre CURIE
Professeur à la Sorbonne
Prix Nobel de Physique
Prix Nobel de Chimie
RADIOACTIVITÉ ET PHYSIQUE NUCLÉAIRE

Véra DANTCHAKOFF
Ancien Professeur à l'Université Columbia (New-York)
Organisateur de l'Institut de Morphogenèse Expérimentale (Moscou Ostankino)
LA CELLULE GERMINALE DANS L'ONTOGENÈSE ET L'ÉVOLUTION

E. DARMOIS
Professeur à la Sorbonne
CHIMIE-PHYSIQUE

K. K. DARROW
Bell Telephone Laboratories
CONDUCTIBILITÉS DANS LES GAZ

Arnaud DENJOY
Professeur à la Sorbonne
THÉORIE DES FONCTIONS DE VARIABLE RÉELLE

J. DUESBERG
Recteur de l'Université de Liége
BIOLOGIE GÉNÉRALE EN RAPPORT AVEC LA CYTOLOGIE

CATALOGUE SPÉCIAL SUR DEMANDE

B. S. Mhavalky

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES
490

SYSTÈMES DE RÉFÉRENCE ET MOUVEMENTS

(Physique relativiste)

PAR

Augustin SESMAT
Professeur d'Histoire et de Critique des Sciences
à l'Institut Catholique de Paris

V

THÉORIE RELATIVISTE DE LA GRAVITATION

PARIS
HERMANN & C^ie, ÉDITEURS
6, Rue de la Sorbonne, 6

1937

DU MÊME AUTEUR :

(LIBRAIRIE HERMANN)

I. — SYSTÈMES DE RÉFÉRENCE ET MOUVEMENTS

(*Physique classique*)

I. — **Le problème des mouvements réels.**
II. — **L'Ancienne astronomie, d'Eudoxe à Descartes.**
III. — **Mécanique newtonienne et gravitation.**
IV. — **Le système absolu de la mécanique.**
V. — **L'optique des corps au repos.**
VI. — **L'optique des corps en mouvement.**
VII. — **L'esprit de la science classique.**

II. — SYSTÈMES DE RÉFÉRENCE ET MOUVEMENTS

(*Physique relativiste*)

I. — **Genèse des théories de la relativité.**
II. — **Principes de la théorie restreinte.**
III. — **Les systèmes privilégiés de la théorie restreinte.**
IV. — **Principes de la théorie générale.**
V. — **Théorie relativiste de la gravitation.**
VI. — **Les systèmes privilégiés de la théorie générale.**
VII. — **Essai critique sur la doctrine relativiste.**

Article XII

THÉORIE RELATIVISTE DE LA GRAVITATION

95. Hypothèse d'une loi des géodésiques généralisée.

S'il y a un E. T. qui détermine les mouvements de gravitation comme celui de Minkowski déterminait les mouvements d'inertie, cet E. T. gravitationnel, avons-nous dit, ne sera plus comme celui de Minkowski galiléen et dépourvu de courbure ; il sera non-galiléen et « courbe », et sa courbure sera déterminée par la distribution spatio-temporelle des masses attirantes de l'ancienne théorie. Quant à la loi des mouvements de gravitation, elle se rattachera à quelqu'une des propriétés structurales de l'E. T., ce qui permettra par le fait même de l'exprimer tensoriellement.

A quelle propriété de l'E. T. rattacher la loi ? — Dans la géométrie de Minkowski les points matériels soumis à la loi d'inertie ont pour trajectoires d'Univers des géodésiques, c'est-à-dire des droites : il est tout indiqué de supposer que ce seront aussi les géodésiques de l'E. T. gravitationnel qui seront les lignes d'Univers des points soumis à la loi de gravitation, c'est-à-dire des points soustraits à toute influence autre que celle du champ gravifique.

Cette hypothèse est admissible *a priori* en ce sens qu'elle permet de faire de la loi d'inertie un cas particulier de la loi de gravitation : en effet d'après les enseignements de la théorie classique l'E. T. devra tendre à devenir, très loin de toute masse, un E. T. galiléen, dans lequel les lignes d'Univers des points matériels

libres seront des droites et leurs mouvements des mouvements d'inertie ; or les géodésiques d'un E. T. qui tend vers la forme galiléenne tendent à devenir des droites ; donc si ce sont les géodésiques qui déterminent, là où l'E. T. est courbe, les mouvements de gravitation, ces mouvements tendront bien, à mesure qu'on s'éloignera des masses, à devenir des mouvements d'inertie. D'autres courbes que les géodésiques pourraient peut-être aussi tendre dans les mêmes conditions à devenir des droites. Cependant comme la loi des géodésiques est sûrement la plus simple, et comme elle a l'avantage de faire dépendre très étroitement les mouvements de gravitation d'une propriété structurale de l'E. T., nous allons dans ce qui suit immédiatement la supposer vraie, quitte à achever plus tard de justifier notre hypothèse en faisant valoir sa réussite.

96. Nécessité d'un E. T. dont la courbure diffère suivant les régions. — La forme des géodésiques d'une *surface* de Gauss est en dépendance de sa courbure par rapport à l'espace ambiant. Une surface peut avoir une courbure qui varie d'une région à l'autre d'une façon simple, étant par exemple constante suivant toute une famille de courbes parallèles, tout en changeant de valeur quand on passe d'une de ces courbes à une autre voisine, ce qui se produit sur les surfaces de révolution. Mais la courbure peut aussi varier d'une façon plus compliquée, les lignes suivant lesquelles elle est constante étant plus rapprochées ou plus éloignées suivant les régions. En supposant pour faciliter le langage un *espace* de Riemann plongé dans un espace euclidien à plus de dimensions que lui, on peut aussi parler des variations de sa courbure d'une région à l'autre ; et il en est de même pour un E. T. non galiléen.

Or s'il y a un E. T. gravitationnel dont les géodésiques soient les lignes d'Univers des points matériels gravitants et dont la « courbure » soit déterminée par la présence des anciennes masses attirantes, cet E. T. aura sûrement une courbure variable d'une « région » spatio-temporelle à l'autre, et variable d'une façon aussi compliquée que l'était du point de vue classique la distribution même des masses dans l'espace et dans le temps. En effet il faudra bien que la nouvelle loi donne en première approximation les mêmes résultats que l'ancienne : d'après celle-ci, l'attrac-

tion se faisait sentir davantage près des masses attirantes et tendait à s'annuler à mesure qu'on s'éloignait de ces masses ; la courbure de l'E. T. gravitationnel devra obéir à une loi de variation équivalente, tout en étant continue.

Cette condition va-t-elle compliquer notre problème ? Nullement : car dans la géométrie de Riemann les relations tensorielles qui expriment une propriété intrinsèque d'un espace à un nombre donné de dimensions conviennent sous leur forme générale à tous les espaces de ce nombre de dimensions, quelle que soit leur structure, quitte à se simplifier quand il s'agit du plus simple d'entre eux, l'espace euclidien.

Dans l'E. T. il en sera de même ; et le problème revient à doter l'E. T. gravitationnel considéré abstraitement d'une structure qui présente le *maximum de complication strictement exigé par les données*; c'est-à-dire qui tout en permettant d'expliquer les mouvements de gravitation dans la sphère d'influence des masses se simplifie jusqu'à donner lieu aux simples mouvements d'inertie dans des régions très éloignées de toute masse.

Mais d'autres considérations vont nous permettre de prévoir la forme de la loi cherchée d'une façon plus précise encore.

97. Le potentiel newtonien de gravitation. — La loi de force de Newton est une loi « d'action instantanée à distance » entre toutes les masses de l'Univers prises deux à deux. Elle exprime, d'un point de vue « statique », la répartition des forces d'attraction à tout instant, en fonction de la répartition spatiale des masses, lesdites forces et les positions des masses étant toujours définies pour Newton par rapport à l'espace absolu, — ou pour nous par rapport au système Σ qui équivaut à l'espace absolu — (nº 5). Elle a pour formule, dans le cas de deux masses m et m_1 séparées par la distance r, $f = G\frac{mm_1}{r^2}$, où f représente l'attraction mutuelle dirigée suivant la droite de jonction des deux masses, et G la constante de la gravitation. Cette constante dépendant des unités de longueur, de masse et de force, nous pouvons dans ce qui suit la supposer égale à l'unité et ne pas l'écrire ; d'où la formule $f = \frac{mm_1}{r^2}$; formule *absolue*, en ce sens qu'elle ne concerne que des quantités invariantes, f, m, m_1, r, sans supposer l'emploi d'aucun système de référence autre que le système

absolu, qui n'est pas utilisable concrètement, pour représenter les positions des masses, ni la distribution des forces [1].

Si l'on veut savoir quelle est l'attraction subie à un instant donné par une masse m du fait d'un nombre quelconque d'autres masses, m_1, m_2... m_n, qui sont à cet instant à des distances r_1, r_2... r_n de la masse m, il suffit de calculer la résultante des forces

$$f_1 = \frac{mm_1}{r_1^2}, \quad f_2 = \frac{mm_2}{r_2^2}, \cdots f_n = \frac{mm_n}{r_n^2},$$

dues à chacune des masses attirantes, et qui sont dirigées chacune suivant la droite qui joint la masse attirante et la masse attirée.

La loi nouvelle ne pourra pas se mettre sous la même forme que la loi de Newton. Pourquoi ? D'abord parce qu'elle ne sera plus une loi d'action instantanée à distance, ce qui, du point de vue de la relativité où il n'y a plus de simultanéité absolue, n'aurait plus de sens ; ensuite parce que si elle doit dépendre de la structure de l'E. T. elle devra présenter le même caractère que les lois structurales de la géométrie de Riemann, c'est-à-dire s'exprimer sous forme différentielle, et ne faire connaître immédiatement que la façon dont l'E. T. varie de proche en proche autour de chacun de ses points.

C'est là, semble-t-il, une telle différence entre les deux lois qu'on ne voit pas comment elles pourront encore s'équivaloir même en première approximation ; mais précisément la loi de Newton avait elle-même été mise depuis longtemps sous forme différentielle par Laplace et par Poisson. Donnons une idée de cette formulation nouvelle de la loi classique ; ce sera un bon moyen de nous préparer à comprendre la loi d'Einstein.

Nous supposons connue la loi de Newton ; et nous considérons d'abord deux masses seulement, une grosse masse M, à peu près fixe, et une petite masse μ qui est censée se déplacer seule sous l'influence de M. Admettons que μ, d'abord placée sans vitesse

---

(1) Lorsqu'on voudra déduire des forces ainsi définies les mouvements observables des masses attirées, conformément à la loi $\gamma = \frac{f}{m}$, il faudra nécessairement faire choix d'un système de référence concret : alors c'est seulement par rapport à un système d'inertie que l'accélération γ de l'une quelconque des masses attirées, m par exemple, sera égale au quotient par m de la force $f = \frac{mm_1}{r^2}$.

initiale à la distance r de M, se rapproche sous l'action de M d'une petite distance $-dr$; le déplacement étant assez petit pour que la force f appliquée à μ puisse être regardée comme constante pendant qu'il s'effectue, le travail élémentaire dT subi par μ du fait du déplacement est égal à $-fdr$; et comme $f = \frac{M\mu}{r^2}$ on peut écrire

$$dT = -\frac{M\mu}{r^2}dr.$$

Une autre masse μ' placée puis déplacée de la même façon que μ aurait subi un travail

$$dT' = -\frac{M\mu'}{r^2}dr.$$

Donc quelle que soit la masse déplacée, μ, on a

$$dT = -\frac{M\mu}{r^2}dr.$$

Au lieu de petites masses μ ou μ' quelconques, considérons une petite masse égale à l'unité : la mesure du travail élémentaire due à l'attraction de cette masse unité par M devient $dT = -\frac{M}{r^2}dr$, et dans cette expression $-\frac{M}{r^2}$ représente au signe près la force exercée par M sur l'unité de masse. Mais $-\frac{M}{r^2}$ est la dérivée par rapport à la distance r de la grandeur $\frac{M}{r}$: c'est cette dernière grandeur, dont la dérivée par rapport à la distance mesure la force exercée sur l'unité de masse par la masse M, qui va jouer le rôle essentiel dans la théorie de Laplace et de Poisson.

Cette grandeur a été appelée le *potentiel*, V, créé par la masse attirante à la distance r dans toutes les directions de l'espace autour d'elle : on a donc

$$V = \frac{M}{r}; \qquad \frac{dV}{dr} = \frac{-M}{r^2}, \qquad \text{ou} \qquad dV = \frac{-M}{r^2}dr = dT.$$

Le potentiel V se présente ainsi comme une fonction de la masse attirante M, qui caractérise chaque point de l'espace et qui est inversement proportionnelle à la distance qui sépare de la masse M le point considéré. Comme ses deux facteurs M et r, V est une grandeur *scalaire*.

Au point M, V serait évidemment infini ; à une distance infinie

de M, V serait nul ; pour un déplacement fini de la masse unité la relation $d\mathrm{V} = d\mathrm{T}$ devient par intégration $\mathrm{T} = \mathrm{V}_1 - \mathrm{V}_0$; c'est-à-dire que le travail subi par une masse unité qui se déplace vers une masse fixe est déterminé par la variation totale de potentiel qui correspond à la différence de ses positions extrêmes, et par cette différence seulement. Supposons que la masse unité soit venue d'une distance infinie à une position P où le potentiel est V ; alors le potentiel du point initial, V_1, était nul, et l'on a $\mathrm{T} = \mathrm{V}$: le potentiel en un point P est égal au travail qu'aurait subi une masse unité en venant sous l'effet de l'attraction de l'infini au point P.

Le potentiel créé par une masse M étant fonction de la seule position et variant par suite avec la distance, il y aura dans l'espace des surfaces d'égal potentiel ; on les appelle *surfaces de niveau* ; pour une seule masse attirante réduite à un point ces surfaces sont évidemment des sphères centrées sur ce point.

Nous sommes partis de la loi de force pour définir le potentiel, mais supposons que nous connaissions seulement le potentiel ainsi que la relation $\mathrm{T} = \mathrm{V}_1 - \mathrm{V}_0$, abstraction faite de la façon dont nous les avons obtenus ; nous pourrions en déduire la force, comme la notion de surface de niveau va nous permettre de le comprendre : supposons qu'une masse soit déplacée sous l'influence du potentiel créé par une autre masse ; à son déplacement correspondra un travail, mesuré par une variation de potentiel ; or si la masse se déplaçait tangentiellement à une surface de niveau la variation de potentiel et par conséquent le travail seraient nuls ; donc il est impossible que la force qui déplace la masse ait aucune composante tangente aux surfaces de niveau ; elle doit donc être orthogonale à ces surfaces ; elle est de plus toujours dirigée dans le sens des potentiels croissants ; quant à sa grandeur on la déduira du fait que le travail $d\mathrm{T}$ est égal à la fois au produit de la variation du potentiel par la masse et au produit de la force par le déplacement : on a d'une part $d\mathrm{T} = \mu d\mathrm{V}$ et d'autre part : $d\mathrm{T} = - f dr$;

$$\text{d'où} \qquad - f dr = \mu d\mathrm{V}, \qquad \text{et} \qquad f = - \mu \frac{d\mathrm{V}}{dr}.$$

On voit que la force est égale, à un facteur près qui n'est autre que la masse attirée, à la dérivée première du potentiel par rap-

port à la distance r. Pour retrouver par ce moyen la force newtonienne, remplaçons V par sa valeur $\frac{M}{r}$: nous avons bien

$$f = -\mu \frac{d}{dr}\left(\frac{M}{r}\right) = -M\mu \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{M\mu}{r^2}.$$

Le potentiel créé par une masse M étant défini en tout point de l'espace la force correspondante est aussi définie en tout point ; d'où le lien entre la notion de potentiel et la notion de champ de forces : les forces d'un champ sont telles qu'elles ne dépendent que de la position et de la grandeur des masses auxquelles elles sont appliquées ; c'est bien le cas des forces déduites du potentiel. Le champ défini au moyen du potentiel newtonien est le champ de gravitation classique.

Jusqu'ici nous avons supposé une seule masse attirante ponctuelle, M ; mais la notion de potentiel s'étend au cas de plusieurs masses attirantes ponctuelles séparées, et même au cas d'un corps attirant continu. Le potentiel V créé en un point P de l'espace vide par un nombre quelconque de masses séparées, m_1, m_2... m_n, dont les distances au point sont r_1, r_2... r_n, est simplement la somme des potentiels dus à chacune de ces masses :

$$V = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \cdots + \frac{m_n}{r_n}.$$

On dit que le potentiel est *additif* ; et cette propriété correspond au principe de l'indépendance des effets des forces appliquées à un même point matériel.

Si les masses attirantes sont les éléments d'un corps continu, le potentiel créé par elles en un point extérieur au corps se calcule par intégration, en vertu du principe d'additivité. En appelant dv l'élément de volume du corps, ρ la densité de cet élément, et r sa distance au point extérieur où l'on cherche à évaluer le potentiel V, on a

$$V = \iiint \frac{\rho dv}{r}.$$

La relation que nous avons dite existe toujours, dans le cas de plusieurs masses séparées et dans le cas d'un corps continu, entre la variation du potentiel et le travail subi par une masse qui se déplace sous l'influence du champ.

Dans tout ce qui précède nous n'avons calculé le potentiel V

qu'*en des points de l'espace extérieurs aux masses créatrices du champ* ; et cette condition paraît bien nécessaire, puisque d'après la formule fondamentale $V = \frac{m}{r}$ le potentiel tel que nous l'avons défini jusqu'à présent serait infini en un point quelconque où se trouve une masse attirante. Mais on peut généraliser la notion de potentiel de manière à la rendre recevable même pour *des points de l'espace où il y a de la matière.*

Considérons un corps continu dont nous connaissons le volume et, en tout point, la densité ρ. Nous savons que le potentiel V créé par ce corps en un point extérieur est égal à l'intégrale $\iiint \frac{\rho dv}{r}$ étendue au volume du corps. Si nous essayons d'appliquer cette formule à un point intérieur au corps, P, elle n'a plus de sens, la fonction $\frac{\rho}{r}$ devenant infinie, à cause de l'annulation de r, quel que soit le point P. Mais, vidons de sa matière par la pensée une petite sphère σ de centre P et faisons tendre vers 0 son rayon. Tant que ce rayon n'est pas nul nous pouvons regarder comme ayant un sens au point P le potentiel V défini par l'intégrale $\iiint \frac{\rho dv}{r}$, puisque P est maintenant extérieur à la matière constituant le corps ; d'autre part quand le rayon de la petite sphère tend vers 0 la valeur de l'intégrale tend vers une limite finie. C'est cette valeur limite de l'intégrale qu'on appelle le potentiel créé par le corps au point P intérieur à ce corps. On constate du reste que la dérivée première de ce potentiel est bien égale à la force attractive exercée au point considéré par le corps attirant d'après la loi de Newton.

Soit par exemple une sphère pleine homogène de densité ρ et de rayon R : on démontre que le potentiel V créé par cette sphère en un point intérieur P situé à une distance r du centre est

$$V = 2\pi\rho\left(R^2 - \frac{r^2}{3}\right).$$

Au centre, où $r = 0$, on aurait $V = 2\pi\rho R^2$; et à la surface où $r = R$,

$$V = 2\pi\rho\left(R^2 - \frac{R^2}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi\rho R^2 = \frac{M}{R},$$

si M est la masse de la sphère, puisque $\frac{4}{3}\pi R^3$ en est le volume.

Le potentiel en un point du corps attirant et le potentiel en un point extérieur aux masses attirantes peuvent encore s'ajouter l'un à l'autre, si bien qu'on obtiendra toujours le potentiel total en un point quelconque de l'espace par simple addition. En un point du vide le potentiel total sera la somme des potentiels dus séparément aux masses extérieures, soit ponctuelles soit continues; en un point de la matière le potentiel total sera la somme du potentiel dû à la masse du corps au sein duquel se trouve le point et des potentiels dus aux masses extérieures à ce corps. On conçoit que cette additivité du potentiel en fasse une grandeur très maniable au point de vue mathématique, et que dans certains problèmes il soit plus avantageux de s'en servir que de considérer directement les forces d'attraction.

98. L'expression différentielle de la loi de Newton ; équations de Laplace et de Poisson relatives au potentiel. — Revenons au potentiel V d'un point du vide ; nous l'avons défini d'une façon absolue, en fonction des masses qui le créent et de leurs distances au point considéré.

Mais nous pouvons, par exemple, rapporter à des coordonnées cartésiennes x, y, z, les positions des masses ainsi que la position du point où nous avons à évaluer le potentiel. Conformément à ce que nous avons dit déjà de la relation entre le potentiel et la force, les composantes X, Y, Z de la force d'attraction F qui s'exerce sur l'unité de masse en un point $P(x, y, z)$ où il n'y a pas de matière, sont, au signe près, reliées aux dérivées premières du potentiel V en ce point par les relations

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}; \qquad Y = \frac{\partial V}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad Z = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Mais Laplace a montré de plus que si l'on forme les dérivées secondes du potentiel, la somme

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

de ces dérivées, en tout point x, y, z où il n'y a pas de matière, est nulle. Si l'on représente par le symbole Δ la somme des trois dérivées secondes — ou le *laplacien* du potentiel — cette loi de Laplace s'exprime par la formule $\Delta V = 0$.

C'est là une condition à laquelle satisfait à tout instant le potentiel de gravitation dans le vide, quelle que soit à cet instant la distribution dans l'espace des masses créatrices du champ. Ainsi à supposer qu'un vide parfait existe à 1.000 kilomètres au-dessus d'un point de la surface terrestre et que les seules masses créatrices du champ en cette région soient le soleil, les Planètes et leurs satellites le potentiel à cette distance de la Terre variera dans le temps suivant les positions des astres solaires, mais toujours son laplacien ΔV sera nul.

Une autre propriété du potentiel newtonien est que, à distance infinie de toute masse, il est lui-même nul ; autrement dit si la distance moyenne r aux masses attirantes du point de l'espace vide où l'on évalue le potentiel V créé par ces masses croît indéfiniment, le produit rV de cette distance par ce potentiel tend vers une limite, qui n'est autre du reste que la somme des masses attirantes.

Nous venons de considérer avec Laplace le potentiel en un point du vide. Poisson s'est demandé si le potentiel créé par un corps continu en un point de ce corps ne satisfaisait pas à une condition analogue à celle de Laplace. Il a trouvé que le laplacien ΔV était alors proportionnel à la densité ρ de la matière au point considéré, selon la formule $\Delta V = -4\pi\rho$.

Ainsi en un point de l'océan où la densité de l'eau est ρ le laplacien du potentiel créé par la masse terrestre satisfait toujours à la condition $\Delta V = -4\pi\rho$.

On remarquera que cette loi de Poisson comprend comme cas particulier celle de Laplace, puisque dans le vide, la densité ρ étant nulle, on a $\Delta V = 0$.

Quant au potentiel total créé en un point P d'un corps continu d'une part par ce corps et d'autre part par des corps extérieurs, son laplacien obéit encore à l'équation de Poisson, car les laplaciens s'ajoutent comme les potentiels eux-mêmes : on a donc pour le potentiel V_1 dû au corps au sein duquel est le point P la condition $\Delta V_1 = -4\pi\rho$; pour le potentiel V_2 dû aux autres corps la condition $\Delta V_2 = 0$; et pour le potentiel total V la condition :

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = -4\pi\rho.$$

Telles sont les propriétés fondamentales du potentiel newtonien : elles ont été déduites, comme la notion même de potentiel,

de la loi de force de Newton ; aussi peut-on dire que les formules de Laplace et de Poisson qui résument ces propriétés explicitent la loi même de Newton. Cependant si elles l'explicitent, elles expriment immédiatement autre chose qu'elle : l'équation de Laplace est relative à la façon dont le potentiel varie d'un point de l'espace vide à un autre point très voisin ; et celle de Poisson à la façon dont le potentiel varie d'un point à un point voisin dans la matière ; au lieu d'exprimer des relations finies entre les masses prises deux à deux, comme la formule de Newton, *les formules de Laplace et de Poisson expriment sous forme différentielle la variation de proche en proche, dans l'espace, d'une grandeur qui dépend de la répartition spatiale de l'ensemble des masses.*

Or c'est précisément par ce caractère qu'elles présentent une certaine analogie avec la loi cherchée par Einstein. Il nous reste maintenant à tirer de cette analogie tout le parti possible pour achever de nous préparer à comprendre la loi d'Einstein elle-même et sa découverte.

99. Analogie de la loi cherchée par Einstein et des lois de Laplace et de Poisson : la déduction de ces deux lois et le problème d'Einstein. — Nous venons de rattacher les lois différentielles de Laplace et de Poisson à la loi de force de Newton. Ce qu'Einstein devra trouver ce sera aussi, nous le savons déjà, une loi différentielle qui indiquera comment la courbure de l'E. T. déterminée par la répartition spatio-temporelle des masses varie de proche en proche. Mais cette loi ne se rattachera pas à une loi de force mettant en relation instantanément des masses éloignées dans l'espace, puisque la simultanéité n'a plus pour Einstein de sens absolu ; et même si par impossible elle devait équivaloir à une loi de force d'un autre genre, cette loi de force ne pourrait que se déduire de la loi différentielle, qu'il faudra découvrir d'abord et qui devra se suffire.

D'après cela, pour justifier complètement le rapprochement que nous avons établi entre la loi d'Einstein et les lois de Laplace et de Poisson, il nous faut montrer avant tout que ces deux dernières lois pourraient aussi se suffire, abstraction faite de la loi d'attraction d'où on les a déduites ; autrement dit que prises en elles-mêmes elles équivalent à la loi de Newton.

Considérons d'abord exclusivement des points de l'espace

extérieurs aux masses ; en tous ces points le potentiel obéit à la loi de Laplace, $\Delta V = 0$. Que pouvons-nous tirer de cette équation aux dérivées partielles du second ordre ?

Il nous faut trouver des solutions de cette équation, en tenant compte d'abord du fait qu'elle est relative à un potentiel créé par des masses, c'est-à-dire que dans le cas d'une seule masse ponctuelle, M, la fonction V, qui entre dans l'équation par ses dérivées secondes, ne pourra présenter de singularité qu'au point même où se trouve cette masse, point où elle aura une valeur infinie, et que à une distance infinie de la masse elle devra être nulle.

Pour résoudre l'équation on tiendra compte aussi du fait qu'elle concerne une fonction « harmonique » ; c'est-à-dire que le potentiel V en un point quelconque de coordonnées x, y, z, est égal à la moyenne des potentiels correspondant aux points d'une sphère de rayon quelquonque ayant ce point comme centre : c'est précisément là ce qu'exprime l'équation de Laplace. Or les conditions aux limites dont nous avons parlé jointes à l'harmonicité de la fonction V suffisent pour établir que cette fonction est nécessairement de la forme $\frac{k}{r}$, r étant la distance du point considéré au point singulier où se trouve la masse M, et k étant une constante ; comme d'autre part la force en tant que dérivée première du potentiel et en tant que résultant de l'influence de M doit être proportionnelle à la fois à V et à M, ces deux dernières grandeurs doivent être proportionnelles entre elles, ce qui permet d'identifier la constante k avec la masse M et redonne bien le potentiel $V = \frac{M}{r}$ qu'on avait déduit de la loi d'attraction.

La solution s'étendant sans difficulté au cas de plusieurs masses attirantes en raison de l'additivité de la fonction V on peut dire que l'équation de Laplace, par celles de ses solutions qui supposent les conditions aux limites dictées par la nature du problème, équivaut à la loi de Newton, et suffirait par elle-même à exprimer la loi de gravitation dans le vide.

Le potentiel dans la matière n'étant plus une fonction harmonique, l'équation de Poisson n'est pas aussi facile à résoudre que celle de Laplace ; cependant on peut la résoudre tout de même, si bien que la loi $\Delta V = -4\pi\rho$, qui contient la loi de Laplace comme cas particulier, équivaut à la loi de Newton dans le cas

général et suffirait par elle-même à exprimer dans la matière comme dans le vide la loi de gravitation.

C'est sur le modèle de ces deux lois différentielles de Laplace et de Poisson qu'Einstein devait *a priori* concevoir la loi tensorielle qu'il cherchait et qu'il lui fallait découvrir directement. Pour pousser jusqu'au bout notre analogie il nous faudrait montrer ici *comment les deux lois classiques auraient pu elles-mêmes être déduites* directement à partir de l'idée générale, que l'expérience aurait pu suggérer avant la découverte de Newton, d'un potentiel de gravitation, c'est-à-dire d'une fonction définie en chaque point de l'espace en dépendance de la répartition spatiale de toutes les masses du monde, et dont on puisse déduire la force gravifique.

Tout d'abord, comme la loi de force de Newton, les lois de Laplace et de Poisson sont purement « statiques », c'est- à-dire qu'elles ne concernent que la distribution spatiale du potentiel créé à un moment donné par des masses réparties de telle façon dans l'espace. Maintenant, de ce point de vue statique, la loi de Newton se formule d'une façon absolue, c'est-à-dire indépendamment de tout choix de coordonnées spatiales. En est-il de même des lois de Laplace et de Poisson ? Non, en ce sens que l'expression même du laplacien suppose des coordonnées d'espace, d'ailleurs arbitraires : nous avons supposé des coordonnées cartésiennes rectangulaires ; si nous en avions pris d'autres la forme du laplacien aurait changé et se serait compliquée ; ainsi dans le cas de deux dimensions et avec des coordonnées polaires ρ et θ, ΔV serait devenu

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}.$$

Mais si l'*expression* du laplacien dépend des coordonnées, *sa valeur* dans la matière comme dans le vide n'en dépend pas ; il vaut toujours 0 dans le vide et $-4\pi\rho$ dans la matière. En ce sens les lois de Laplace et de Poisson sont donc elles aussi indépendantes des coordonnées utilisées pour représenter la répartition des masses et du potentiel, c'est-à-dire qu'elles sont covariantes.

Or la covariance de ces deux lois, si on eût voulu les déduire de l'idée d'un potentiel, aurait pu être postulée *a priori* : en effet l'hypothèse la plus simple sur la nature du potentiel cherché eût été qu'il était une grandeur scalaire, grandeur invariante dépen-

dant uniquement en chaque point de l'espace des masses extérieures et de leurs distances au point considéré, c'est-à-dire d'autres grandeurs invariantes, auxquelles le potentiel ne peut être lié que par quelque relation covariante.

On voit maintenant comment se serait posé le problème de la déduction de nos deux lois classiques : dans le cas du vide d'abord la fonction potentiel se serait présentée comme n'ayant de valeurs singulières qu'aux points occupés par les masses, et comme nulle à distance infinie de toute masse ; la loi de ses variations de proche en proche dans l'espace aurait nécessairement consisté en une relation covariante concernant elle-même ou ses dérivées et valable pour une distribution quelconque des masses ; en particulier étant supposée vérifiée pour un certain ensemble de masses, puis séparément pour un autre, elle aurait dû l'être aussi pour la combinaison des deux ensembles, comme l'expérience l'eût indiqué.

Or on peut montrer que ce bloc de conditions n'est réalisé que par la loi de Laplace qui en fait concerne un invariant différentiel, le laplacien, dérivé du potentiel lui-même, et le soumet à la condition d'être toujours nul dans le vide.

Quant à la loi de Poisson elle aurait pu se rattacher à celle de Laplace de la façon suivante : le potentiel de Laplace dans le vide, V, est une grandeur scalaire proportionnelle aux masses attirantes ; s'il doit y avoir pour un volume rempli de matière une loi analogue à celle de Laplace, elle sera relative au potentiel créé par la matière même du volume considéré ; si d'autre part ce potentiel doit pouvoir s'ajouter à celui du vide, il devra lui aussi être une grandeur scalaire proportionnelle à la grandeur de la masse qui le crée. Donc si l'on suppose comme il est naturel que la loi cherchée pour l'intérieur de la matière ressemble à celle de Laplace et la comprend comme cas particulier, elle comportera au premier membre le laplacien ΔV du potentiel créé par la matière enfermée dans le volume considéré, et au second membre, *en vertu du principe d'homogénéité*, une grandeur scalaire, proportionnelle à la grandeur au voisinage de chaque point de la masse créatrice du potentiel, et qui se réduise à 0 dans le vide : cette grandeur n'est autre que la densité ρ ; quant au coefficient 4π il ne dépend que du choix des unités, lesquelles sont supposées telles que G soit égal à 1.

Les conditions postulées au cours de la détermination des deux

lois ne s'imposant pas toutes d'une façon nécessaire, il eût fallu confronter les lois une fois découvertes avec les données de l'expérience : bornons-nous à la loi de Laplace dans le cas d'un seul centre attirant ; nous savons déjà que les conditions aux limites et l'harmonicité de la fonction V conduisent à un potentiel de forme $\frac{M}{r}$, où M est la masse attirante et r la distance à cette masse du point considéré ; nous savons d'autre part qu'étant donné le potentiel on peut par simple dérivation obtenir la force agissant sur l'unité de masse ; et que cette force est bien une attraction proportionnelle à la masse attirante et inversement proportionnelle au carré de la distance. Donc à supposer une grosse masse attirante, comme le soleil, de grandeur M, et en sa présence à une distance r une masse m assez petite pour que sa propre attraction sur le soleil soit négligeable, comme la planète Mercure, on saurait que cette planète subit de la part du soleil une attraction $\frac{Mm}{r^2}$, et que étant données relativement à un système d'inertie S où le soleil est immobile telles conditions initiales, la planète doit décrire par rapport audit système l'orbite képlérienne classique : dans la mesure où cette orbite est bien celle de Mercure, après correction des perturbations dues à l'influence des autres planètes, on aurait vérifié l'exactitude de la loi de Laplace.

Si nous avons tenu à développer ainsi jusqu'au bout les conséquences de notre supposition d'une découverte directe des lois de Laplace et de Poisson, y compris la vérification de la loi de Laplace dans le cas simple de Mercure, c'est que Einstein a dû suivre pour la découverte et la vérification de sa loi une marche parallèle à celle que nous venons de dire, et que de plus il s'est laissé guider expressément par la forme même des lois de Laplace et de Poisson.

Avant d'en venir aux raisonnements mêmes d'Einstein, récapitulons d'après tout ce qui précède l'ensemble des conditions qui s'imposaient *a priori* à la nouvelle loi pressentie par lui : cette loi devait être tensorielle, c'est-à-dire se ramener à l'annulation d'un tenseur, et par là même covariante dans tout changement de coordonnées d'E. T. selon le principe général de relativité ; elle devait concerner un tenseur déduit du ds^2 et exprimer le degré de « courbure » de l'E. T. conformément à l'hypothèse d'une géométrie d'Univers répondant à la gravitation ; elle devait être

valable sous sa forme générale dans les régions galiléennes de l'E. T., c'est-à-dire très loin, au sens spatial, de toute masse, aussi bien que dans les régions « courbes » plus proches des masses ; ceci pour répondre à l'idée même de loi universelle. Beaucoup de lois tensorielles exprimant une certaine structure de l'E. T. pouvaient du reste *a priori* satisfaire à ces conditions, d'après ce que nous avons dit du caractère de covariance et en même temps de généralité des lois de la géométrie riemannienne. Aussi fallait-il, pour choisir parmi les lois possibles, s'imposer des conditions plus précises, quitte à ne les admettre d'abord qu'au titre d'hypothèses. En fait Einstein, s'inspirant de la forme des lois de Laplace et de Poisson, qui sont relatives aux dérivées secondes du potentiel et linéaires par rapport à ces dérivées, postula que la nouvelle loi, qui devait nécessairement pour exprimer la courbure de l'E. T. concerner les $g_{\mu\nu}$ du ds^2 et leurs dérivées, ne contiendrait pas de dérivées des $g_{\mu\nu}$ supérieures aux *dérivées secondes* et serait elle aussi *linéaire par rapport à ces dérivées.*

Il lui fallait donc examiner successivement tous les tenseurs qu'on peut déduire du ds^2 et rechercher si l'annulation de quelqu'un d'entre eux pouvait répondre à l'ensemble des conditions et hypothèses, et constituer une loi acceptable.

Dans l'affirmative il ne lui resterait plus qu'à confronter les conséquences de la loi avec les faits, c'est-à-dire à passer de la loi aux mouvements de gravitation, par l'intermédiaire de l'hypothèse complémentaire des géodésiques, — ou au besoin par une autre du même genre —, et à voir si ces mouvements étaient au moins aussi conformes aux observations que les mouvements déduits de la loi classique.

Nous allons voir qu'en fait une solution acceptable se trouva pour ainsi dire imposée sans ambiguïté à Einstein par l'ensemble de ses postulats et hypothèses.

100. Détermination de la nouvelle loi de gravitation dans le vide (1). — Einstein cherche d'abord une formule qui soit l'analogue de celle de Laplace, $\Delta V = 0$, c'est-à-dire une formule qui exprime qu'un certain tenseur renfermant les $g_{\mu\nu}$ et leurs dérivées

(1) Sur cette question voir A. Einstein : *Les fondements de la théorie de la relativité générale*, trad. Solovine, § 12-14, p. 44-49.

est nul dans toute région de l'E. T. correspondant au vide de matière dans l'espace et contenant les lignes d'Univers de points matériels isolés soumis à la seule loi de gravitation.

Les tenseurs à considérer sont ceux que contient le ds^2 sous sa forme la plus générale, ou ceux qu'on en peut déduire. Il y a en premier lieu le tenseur fondamental $g_{\mu\nu}$; mais son annulation n'est pas à envisager puisque les coefficients qui le constituent ont tous des valeurs significatives dans le cas général, certains seulement pouvant s'annuler dans le cas, en particulier, d'un E. T. galiléen rapporté à des coordonnées galiléennes.

Passons donc à des tenseurs dérivés du tenseur fondamental : le plus important est celui de Riemann-Christoffel, qui s'obtient par dérivation à partir du tenseur fondamental ; ce tenseur dérivé est du quatrième ordre ; nous le désignerons par le symbole $E^{\sigma}_{\mu\nu\rho}$ [1]. Il a $4^4 = 256$ composantes et contient avec les $g_{\mu\nu}$ leurs dérivées premières et secondes ; géométriquement il représente la courbure riemannienne de l'E. T.

Que signifierait la formule $E^{\sigma}_{\mu\nu\rho} = 0$? C'est la constitution même de notre tenseur qui va nous l'apprendre : $E^{\sigma}_{\mu\nu\rho}$ est une somme de termes dont chacun contient au moins une dérivée covariante, première ou seconde, des $g_{\mu\nu}$. Or nous savons que si l'on utilise dans le plan, par exemple, des coordonnées rectilignes, la dérivée covariante d'un vecteur s'identifie avec sa dérivée ordinaire ; il en est de même pour les tenseurs dans un E. T. galiléen quand on utilise des coordonnées galiléennes. Supposons donc qu'il existe une région spatio-temporelle dans laquelle les $g_{\mu\nu}$ soient constants quand on rapporte cette région à des coordonnées galiléennes ; la constance des $g_{\mu\nu}$ suppose alors que toutes leurs dérivées soient nulles ; d'où pour le système adopté le tenseur $E^{\sigma}_{\mu\nu\rho}$, dans chacun des termes duquel figurera au moins une dérivée nulle, aura dans cette région toutes ses composantes nulles. Mais si ce tenseur est ainsi annulé pour un système de coordonnées il doit être nul aussi pour tous les autres systèmes, même pour ceux avec

---

(1) Il nous semble qu'en l'honneur d'Einstein on ferait bien de désigner ainsi par la lettre E, au lieu de la lettre R qui rappelle peut-être en géométrie le nom de Riemann, les tenseurs qui servent à exprimer la loi de Gravitation. Ce choix aurait l'avantage, par ailleurs, de laisser disponible la lettre R pour représenter le rayon de l'Univers.

lesquels les $g_{\mu\nu}$ ne seraient plus constants dans la région considérée. La loi $E^{\sigma}_{\mu\nu\rho} = 0$ nous apparaît donc comme une condition nécessaire pour que relativement à des coordonnées galiléennes les $g_{\mu\nu}$ puissent être constants dans certaines régions de l'E. T. (1).

Une telle condition devra certes être vérifiée dans la loi cherchée puisqu'il faudra toujours que très loin de toute masse l'E. T. soit galiléen et que le ds^2 exprimé en coordonnées galiléennes ait la forme simple où tous les $g_{\mu\nu}$ sont soit nuls soit égaux à l'unité. Mais il est impossible que ladite condition soit obtenue au moyen de la loi $E^{\sigma}_{\mu\nu\rho} = 0$ supposée valable dans tout l'E. T., car cette formule entraînerait que l'E. T. a partout une courbure riemannienne nulle, autrement dit est partout galiléen, ce qui serait la négation de tout phénomène de gravitation. Il faut demander la condition exigée à une formule moins restrictive que $E^{\sigma}_{\mu\nu\rho} = 0$, mais qui cependant implique celle-ci pour les régions de l'E. T. très éloignées des masses.

Quel sera le nouveau tenseur dont l'annulation satisfera à cette exigence tout en laissant à l'E. T. une courbure ?

Ici Einstein effectue sur le tenseur mixte $E^{\sigma}_{\mu\nu\rho}$ l'opération de la contraction ; il obtient un tenseur du second ordre, $E_{\mu\nu}$, tenseur à seize composantes seulement, et symétrique, ce qui réduit à dix le nombre des composantes distinctes ; et il examine les conséquences de la formule $E_{\mu\nu} = 0$, formule qui symbolise dix équations exprimant l'annulation des dix composantes distinctes du tenseur $E_{\mu\nu}$.

Le tenseur $E_{\mu\nu}$ ne contient que les $g_{\mu\nu}$ et leurs dérivées premières et secondes, et il est linéaire par rapport aux dérivées secondes, tout comme le laplacien classique.

Son annulation est compatible aussi bien avec un E. T. galiléen où $E^{\sigma}_{\mu\nu\rho}$ sera nul, qu'avec un E. T. non-galiléen, où $E^{\sigma}_{\mu\nu\rho}$ sera différent de 0. La loi $E_{\mu\nu} = 0$ laisse prévoir par conséquent un E. T. qui sera dans certaines régions non-galiléen et dans

(1) Rigoureusement parlant les $g_{\mu\nu}$ ne peuvent être constants, quelles que soient les coordonnées, dans aucune région d'un E. T. qui n'est pas *partout* galiléen ; mais la structure d'un tel E. T. peut avoir *pour limite* dans certaines régions la structure galiléenne : c'est ce qu'on devra entendre chaque fois que pour abréger nous nous exprimerons comme nous venons de faire.

d'autres galiléen, comme l'exige *a priori* la notion classique — vérifiée en première approximation — de la gravitation. Il y aura donc lieu d'étudier de plus près les conséquences de cette loi, afin de les confronter avec les données de l'expérience.

Toutefois il convient auparavant d'examiner si d'autres tenseurs déduits du ds^2 ne présenteraient pas les mêmes avantages immédiats que $E_{\mu\nu}$: la réponse est que, à un terme additif près de la forme $kg_{\mu\nu}$, k étant une constante, le tenseur $E_{\mu\nu}$ est le seul qui satisfasse à toutes les conditions imposées *a priori* : nous avons montré ci-dessus que ni le tenseur métrique ni le tenseur de Riemann-Christoffel ne pouvaient répondre à la question ; il en est de même du tenseur qu'on obtient en contractant $E_{\mu\nu}$; c'est alors l'invariant E, qui exprime la courbure gaussienne de l'E. T. ; or l'annulation de E serait une loi inacceptable, parce que trop générale ; $E = 0$ en effet ne symbolise qu'une seule équation, qui laisserait trop indéterminés les coefficients $g_{\mu\nu}$. En fin de compte il ne reste bien à envisager pour le cas du vide que la formule $E_{\mu\nu} = 0$.

101. Détermination de la nouvelle loi de gravitation dans la matière. — La loi de Poisson, $\Delta V = -4\pi\rho$, exprimait immédiatement qu'en tout point d'une région de l'espace remplie de matière le laplacien ΔV du potentiel dépendait de la densité ρ de la masse créatrice du champ au point considéré.

Einstein, après avoir admis la loi $E_{\mu\nu} = 0$ pour le vide, analogue à la loi de Laplace $\Delta V = 0$, devait chercher aussi pour l'intérieur de la matière une loi analogue à celle de Poisson. Nous avons expliqué comment on aurait pu découvrir la loi de Poisson à partir de celle de Laplace : la loi cherchée ne pouvait que mettre le laplacien ΔV en relation avec une grandeur caractéristique de la matière créatrice du champ ; pour qu'en outre cette loi comprenne la loi de Laplace comme cas particulier dans le vide, il fallait qu'elle exprime une égalité entre le laplacien et une grandeur scalaire comme lui, liée à la matière, et qui se réduise à 0 dans le vide : ce ne pouvait être que la densité ρ.

Par un raisonnement analogue on serait conduit à dire que le tenseur $E_{\mu\nu}$ qui est nul dans le vide doit être dans la matière égal à une grandeur liée elle aussi à la présence de cette matière et qui s'annule dans le vide ; mais qu'au surplus pour être égale à

$E_{\mu\nu}$ qui est un tenseur la grandeur en question ne devait plus être un scalaire comme la densité ρ, mais un tenseur, conformément au principe d'homogénéité tensorielle.

En fait nous verrons que la solution ne devait pas être tout à fait aussi simple, en ce sens qu'au premier membre de la nouvelle équation correspondant à la loi de Poisson le tenseur $E_{\mu\nu}$ ne figure plus seul ; mais le point essentiel était de découvrir le tenseur du second membre : commençons par là.

Pour comprendre la façon dont fut résolu ce problème il faut savoir que certaines grandeurs qui jouent un rôle capital dans les théories de la mécanique, même classique, sont précisément des tenseurs. On n'en sera pas étonné si l'on se souvient que le nom de tenseur a été emprunté comme nous avons eu l'occasion de le dire à la théorie de l'élasticité.

Le postulat de la relativité restreinte, à savoir que toutes les lois physiques fondamentales doivent être indépendantes du système d'inertie adopté pour étudier le mouvement des particules, invitait le physicien à mettre en évidence les tenseurs de la Mécanique et de l'E. M., tout au moins en les exprimant relativement aux systèmes d'inertie et avec les coordonnées ordinaires, que ces tenseurs soient des scalaires (tenseurs d'ordre 0), ou des vecteurs (tenseurs du premier ordre), ou des tenseurs proprement dits, du second ordre ou d'un ordre supérieur.

Du même coup les physiciens se trouvaient conduits à présenter les lois sous la forme de *relations tensorielles*, en particulier de relations affirmant que toutes les composantes de tel tenseur sont nulles, puisque toute relation de ce genre vraie pour un système d'inertie est vraie pour tous les autres. Ceci aurait pu s'appliquer déjà aux scalaires et aux vecteurs de l'espace ; mais c'est surtout du point de vue de l'E. T. de Minkowski et des grandeurs spatio-temporelles que la recherche systématique des quantités et des relations tensorielles se montra fructueuse.

On commença par l'E. M., puis l'on passa à la mécanique des milieux continus, spécialement à l'hydrodynamique. Or l'adaptation aux postulats de la relativité restreinte et la traduction en langage spatio-temporel des lois de l'hydrodynamique classique put se faire aisément grâce à la considération d'un tenseur d'E. T. du second ordre, dont les seize composantes étaient fonction, en chaque point du fluide, de la densité de masse, de la vitesse des

particules, et des pressions internes, au point considéré. Ce tenseur, désigné par le symbole $T_{\mu\nu}$, fut appelé, eu égard aux éléments fondamentaux qui entrent dans sa constitution, le tenseur d'impulsion et d'énergie lié à la matière, ou plus simplement *le tenseur matériel.*

Nous n'avons pas à préciser davantage la nature de ce tenseur, mais nous devons souligner deux de ses propriétés qui devaient précisément le rendre utilisable dans la théorie de la gravitation. La première propriété est que le tenseur matériel se réduit rigoureusement dans le cas du repos de la matière, et en l'absence de pressions ou tensions internes, à un scalaire qui n'est autre que la densité de masse. Du reste il en est encore ainsi à très peu près quand la matière est le siège de pressions ou de tensions, et plus généralement quand à la matière sont liées des énergies d'origine quelconque ; voici pourquoi : le tenseur matériel comprend, en plus de la masse, toutes les formes d'énergie classiques dont la matière peut être le siège : énergie cinétique, énergie é.m. ; énergie chimique ; énergie de déformation mécanique, etc. ; la masse est d'ailleurs comparable à ces énergies puisqu'elle représente elle-même une énergie égale à son produit par le carré de la vitesse de la lumière, $W = m_0c^2$; or la présence du facteur c^2 dans ce produit fait précisément qu'auprès de l'énergie contenue dans la masse elle-même toutes les autres sont négligeables, même l'énergie cinétique, à moins que la vitesse de la matière ne soit une fraction notable de celle de la lumière.

En première approximation le tenseur $T_{\mu\nu}$ pourra donc toujours être réduit à la densité ρ, qui n'est autre que la seizième de ses composantes, T_{44}.

L'autre propriété repose sur la notion de *divergence* : dans la théorie classique de Maxwell, étant donné un vecteur $\vec{E}$ faisant partie d'un champ et ses composantes X, Y, Z, suivant trois axes rectangulaires, on utilisait la somme

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z},$$

sous le nom de divergence du vecteur.

L'intérêt de cette quantité, qui est un scalaire, tient à ce que son intégrale étendue à un volume donné est égale au « flux » du vecteur à travers la surface qui enferme ce volume, le flux à travers

un élément de surface étant lui-même le produit de l'élément par la projection du vecteur sur la normale à cet élément. Il résulte de ces définitions que quand on a affaire à un vecteur vitesse dont la divergence est nulle pour tout un volume, le flux qui entre dans ce volume est égal à tout moment au flux qui en sort, si bien qu'à l'intérieur du volume il y a *conservation* au cours du temps de la quantité dont le vecteur représente le déplacement.

Par analogie avec la divergence d'un vecteur on fut conduit à définir dans la théorie relativiste de l'hydrodynamique une quantité qui en l'absence de forces de gravitation, — c'est-à-dire dans un E. T. galiléen — et quand on emploie des coordonnées galiléennes, se déduit du tenseur $T_{\mu\nu}$ par dérivation ordinaire, et qui s'appelle aussi *la divergence du tenseur* $T_{\mu\nu}$.

Or, et c'est ici la seconde propriété intéressante de notre tenseur, l'annulation de sa divergence, dans le « volume » à quatre dimensions occupé par une portion de matière soustraite à toute action extérieure, exprime la *conservation* de l'impulsion et de l'énergie à l'intérieur de cette portion de matière, un peu comme l'annulation de la divergence d'un vecteur vitesse dans un volume exprimait la conservation à l'intérieur de ce volume de la grandeur dont le déplacement était représenté par le vecteur ; si bien que *admettre la conservation de l'impulsion et de l'énergie dans une portion de matière isolée revenait à dire que la divergence du tenseur matériel liée à elle était nulle.*

Ces explications fournies, nous pouvons comprendre comment le tenseur matériel put être introduit dans la formule de la loi de gravitation pour l'intérieur de la matière : le fait que ce tenseur se réduit à très peu près dans le cas du repos à la densité de masse invitait à lui faire jouer dans la nouvelle loi le même rôle qu'à la densité ρ dans la loi de Poisson [1]. Mais fallait-il attribuer encore au tenseur $T_{\mu\nu}$ une divergence nulle dans le cas où la portion de matière considérée serait non plus soustraite à la gravita-

[1] On voit ce qu'impliquait cette substitution : le tenseur matériel comprend outre la densité de masse la densité d'impulsion et d'énergie, ou plus brièvement la densité *d'énergie* liée à la matière, quelle qu'en soit la forme. En énonçant son principe d'équivalence, Einstein avait postulé que l'énergie était *pesante* comme la masse classique, c'est-à-dire obéissait au champ de gravitation. Ici il admettait que l'énergie contribuait comme la masse classique à *créer le champ* ; nouveau postulat, donc, mais qu'imposait pour ainsi dire l'identification relativiste de la masse et de l'énergie.

tion et rapportée à un système d'inertie, — c'est-à-dire plongée dans un E. T. galiléen étudié en coordonnées galiléennes — mais soumise à la gravitation, donc plongée dans un E. T. non galiléen ?

C'eût été impossible si la nouvelle théorie avait continué d'interpréter le champ de gravitation comme un champ de forces, puisque les forces de gravitation en exerçant sur la portion de matière considérée des actions extérieures eussent empêché l'impulsion et l'énergie de s'y conserver. Mais nous savons que la nouvelle théorie ne voyait dans la gravitation qu'une généralisation de l'inertie, ce qui obligeait à dire qu'un système matériel isolé par ailleurs et plongé dans un E. T. non galiléen n'était soumis qu'à ses actions intérieures, et que par suite l'impulsion et l'énergie devaient encore s'y conserver.

La conséquence était que si l'on voulait faire jouer au tenseur matériel le rôle de l'ancienne densité de masse il fallait lui attribuer *a priori* une divergence nulle, en vertu du principe de conservation. Seulement force était de concevoir cette divergence comme la généralisation pour un E. T. non galiléen et pour des coordonnées spatio-temporelles quelconques de la divergence calculée d'abord pour un E. T. galiléen et en coordonnées galiléennes. La généralisation, qui aurait déjà été nécessaire pour un E. T. galiléen rapporté à des coordonnées quelconques, consiste à substituer les dérivées covariantes aux dérivées ordinaires ; et c'est la divergence ainsi calculée du tenseur matériel, *sa divergence covariante*, qui devait être nulle dans toutes les régions de l'E. T. indépendamment du choix des coordonnées.

En définitive voici comment se précisait le problème de la nouvelle loi de gravitation pour la matière [1] : on avait au second membre, pour remplacer la densité ρ de l'équation de Poisson, le tenseur $T_{\mu\nu}$, de divergence covariante nulle ; il fallait au premier membre un tenseur déduit du ds^2 et qui exprime la courbure de l'E. T., mais un tenseur qui pour être égal à $T_{\mu\nu}$ ait lui aussi une divergence nulle ; car deux tenseurs égaux ont toujours des diver-

---

[1] Nous indiquons ici la marche suivie par Eddington dans son exposé de la théorie : *Espace, Temps et Gravitation* ; traduction J. Rossignol, 1 vol., Paris, 1921. Partie théorique. Section IV, nos 39-40, p. 92-97. Einstein a suivi la même marche dans sa 4e Conférence de Princetown : *Quatre conférences sur la Théorie de la Relativité*. Trad. Solovine, 4e Conférence, p. 73-77 ; mais dans son Mémoire de 1916 il avait procédé autrement.

gences égales ; était-ce le cas du tenseur $E_{\mu\nu}$ de la loi pour le vide ? Non ; et c'est pourquoi nous disions plus haut que dans la solution ce tenseur ne devait pas figurer seul au premier membre. Mais les conditions déjà énoncées et reprises ici — que le tenseur de courbure ne devait pas dépendre de dérivées des $g_{\mu\nu}$ d'un ordre supérieur au second et qu'il devait être linéaire par rapport aux dérivées secondes — imposait la solution, à un terme près de divergence nulle dont nous ne parlerons pas pour le moment : au tenseur $E_{\mu\nu}$ Einstein substitua le tenseur de divergence nulle $E_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}E$, où E est l'invariant qui représente la courbure totale de l'E. T., généralisation de la courbure des surfaces de Gauss.

En définitive la nouvelle loi de Gravitation pour l'intérieur de la matière était

$$E_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}E = -\varkappa T_{\mu\nu} ;$$

où $\varkappa$ représente une constante. Cette loi comprend-elle la loi $E_{\mu\nu} = 0$ comme cas particulier ? Oui, parce que toutes les composantes de $T_{\mu\nu}$ ne contenant que des grandeurs relatives à la matière, ce tenseur s'annule dans le cas du vide ; dès lors on a

$$E_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}E ;$$

mais on démontre que cette relation ne peut être satisfaite que si $E = 0$; ce qui redonne bien la loi $E_{\mu\nu} = 0$. A elle seule donc la formule

$$E_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}E = -\varkappa T_{\mu\nu}$$

exprime pour tous les cas la nouvelle loi de gravitation, comme la formule $\Delta V = -4\pi\rho$ de Poisson exprimait la loi de gravitation classique.

102. Accord approché de la nouvelle loi de gravitation avec la loi classique [1]. — La première chose à faire après avoir formulé la nouvelle loi de gravitation était de voir si elle était d'accord en première approximation avec la loi classique.

---

[1] A. Einstein : *Les fondements de la théorie de la relativité générale.* Trad. Solovine, § 21, p. 63-66.

L'accord escompté devait se manifester de deux manières : d'abord dans la loi du mouvement d'un point matériel soumis à la gravitation quand on se référait à des coordonnées d'E. T. aussi proches que possible des coordonnées galiléennes ; ensuite dans la formule même du champ de gravitation. Nous allons voir que dans les deux cas il y a bien en première approximation accord des deux théories.

La nouvelle loi du mouvement gravitationnel d'un point est donnée en langage d'E. T. par les équations des géodésiques. La loi classique correspondante s'obtenait à partir du potentiel par une simple dérivation, la dérivée par rapport à l'espace du potentiel newtonien n'étant autre que la force relative à l'unité de masse, laquelle a mêmes grandeur, direction et sens que l'accélération par rapport à un système d'inertie ; on a en effet

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{d^2x}{dt^2}; \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Or on peut, à condition de négliger de petites différences, retrouver l'équivalent de ces dernières équations à partir des équations des géodésiques de la théorie d'Einstein.

Pour cela on suppose [1] qu'on a affaire à des coordonnées d'E. T. qui s'écartent peu des valeurs galiléennes ($g_{\mu\nu} = 1$ ou $g_{\mu\nu} = 0$ suivant que $\mu = \nu$ ou $\mu \neq \nu$), ce qui correspond à un champ de gravitation peu intense et à des coordonnées qui très loin de toute masse seraient galiléennes. Le mouvement relatif à ce choix de coordonnées, qui sépare à très peu près le temps de l'espace, se rapproche alors du mouvement classique relatif à un système d'inertie.

Puis on suppose que relativement aux coordonnées choisies la vitesse du point matériel est petite par rapport à celle de la lumière, ainsi que la vitesse des masses créatrices du champ.

Ces conditions suffisent pour que les équations d'une géodésique se réduisent à celles-ci, qui sont semblables aux équations classiques du mouvement :

$$\frac{d^2x_\mu}{dx_4^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x_\mu}, \qquad \text{où} \qquad \mu = 1, 2, 3,$$

(1) A. Einstein : *ibid.*, p. 64.

c'est-à-dire où x_μ symbolise les trois coordonnées d'espace, tandis que x_4 représente le temps. Les équations classiques présentées de manière analogue auraient pour symbole,

$$\frac{d^2x_\mu}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x_\mu}, \qquad \text{où} \qquad \mu = 1, 2, 3.$$

Pour regarder les deux équations symboliques comme équivalentes on voit qu'il suffit d'identifier à une constante près, pour le cas où sont réalisées les hypothèses admises, la grandeur $-\frac{1}{2}g_{44}$ avec le potentiel classique V. On a

$$-\frac{1}{2}g_{44} = V + \text{constante}\,;$$

mais, à distance infinie de toute masse, $V = 0$, et $g_{44} = 1$;

la constante est donc égale à $-\frac{1}{2}$; d'où l'on peut écrire

$$-\frac{1}{2}g_{44} = V - \frac{1}{2}; \qquad \text{ou} \qquad V = \frac{1}{2}(1 - g_{44})\,; \quad \text{ou encore} \quad g_{44} = 1 - 2V.$$

Nous allons montrer maintenant que, grâce à cette identification des potentiels, la loi du champ d'Einstein équivaut bien en première approximation à la loi de Poisson.

La confrontation des deux théories suppose ici la comparaison du tenseur $T_{\mu\nu}$ avec la densité de masse au repos ρ. Or nous savons qu'en première approximation et dans le cas du repos de la matière $T_{\mu\nu}$ peut être réduit à sa seizième composante qui n'est autre que ρ ; et que ceci est encore vrai à très peu près quand la vitesse de la matière, ici de la matière créatrice du champ, est faible par rapport à celle de la lumière, ce qui est ordinairement le cas en astronomie. On a donc à calculer la courbure de l'E. T., c'est-à-dire la valeur du tenseur $E_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}E$ dans le cas où le tenseur matériel $T_{\mu\nu}$ se réduit à ρ et le second membre de la formule d'Einstein à $-\varkappa\rho$.

Or on trouve que, en supposant réalisées les mêmes conditions que tout à l'heure, l'équation d'Einstein prend la forme simplifiée que voici :

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_2{}^2} + \frac{\partial^2 g_{44}}{\partial x_3{}^2}\right] = -\frac{1}{2}\varkappa\rho c^2.$$

Mais nous avons dit ci-dessus que dans le cas dont il s'agit il

y a lieu d'identifier $-\frac{1}{2} g_{44}$ avec le potentiel classique V, à une constante près qui n'intervient pas quand on prend les dérivées ; si bien que le premier membre de notre équation n'est autre que le laplacien ΔV du potentiel V, tandis que le second membre est simplement la densité de masse multipliée par la constante $-\frac{\varkappa c^2}{2}$. Aux constantes près l'équation obtenue équivaut donc à l'équation de Poisson : $\Delta V = -4\pi\rho$, ce qui démontre l'accord des deux lois de la détermination du champ en première approximation.

Le dernier rapprochement permet du reste d'interpréter en fonction des données classiques la constante $\varkappa$ de la loi d'Einstein : dans l'équation de Poisson nous avons sous-entendu la constante de la gravitation, G, la supposant égale à 1 avec un choix convenable des unités. Si nous la réintroduisons l'équation devient $\Delta V = -4\pi G\rho$; d'autre part nous avons d'après ce qui précède $\Delta V = -\varkappa\rho\frac{c^2}{2}$; en écrivant que ces deux valeurs de ΔV sont égales nous obtenons

$$4\pi G\rho = \varkappa\frac{c^2}{2}\rho, \qquad \text{d'où} \qquad \varkappa = \frac{8\pi}{c^2} G.$$

En unités C. G. S., G valait $6,7\ 10^{-8}$; avec les mêmes unités $\varkappa$ vaut

$$\frac{8\pi}{c^2} \cdot 6,7 \cdot 10^{-8} = 1,87 \cdot 10^{-27}.$$

On voit immédiatement ce qu'il était permis de conclure du double accord ainsi établi entre la loi d'Einstein réduite à ses éléments prépondérants et la loi de Newton : c'est que les deux hypothèses qui avaient servi solidairement à établir la loi en question, à savoir l'hypothèse fondamentale d'une structure d'Univers correspondant à la gravitation et cette hypothèse complémentaire que les masses gravitantes devaient suivre des géodésiques de l'E. T. gravitationnel, avaient bien des chances de répondre l'une et l'autre à la réalité. Nous verrons qu'une étude plus poussée des conséquences de la loi d'Einstein devait conduire à des conclusions plus favorables encore.

103. L'hypothèse d'un Univers fermé. — Pour en finir avec notre exposé des principes de la théorie et avant d'en venir à la question des vérifications expérimentales, nous allons donner

encore quelques indications sur les idées d'Einstein relatives à la *structure d'ensemble de l'Univers.*

La théorie de Newton exige, pour que le potentiel de gravitation ait en tout point de l'espace une valeur finie, que la matière, supposée répartie au sein d'un espace sans bornes, ou bien occupe seulement un volume limité de cet espace, ou bien y présente une densité moyenne qui, à partir des régions les plus denses, tende vers 0 dans toutes les directions. Comme l'une et l'autre des conditions assignées est parfaitement réalisable, on peut dire qu'en ce qui concerne la gravitation la conception classique de l'Univers ne présente pas de difficulté.

Elle n'est pas aussi satisfaisante en ce qui concerne le rayonnement : si en effet la matière est enfermée ou plus condensée dans un volume fini au sein d'un espace vide, ou à peu près vide, illimité, l'énergie rayonnante, qui d'après la théorie classique du rayonnement s'échappe constamment des astres dans toutes les directions, se disperse sans retour vers l'extérieur du monde ; et l'on est en droit de se demander ce qu'elle devient et pourquoi l'énergie rayonnante de tous les corps n'est pas dès maintenant épuisée.

Comment ces questions se présentent-elles du point de vue de la nouvelle théorie ? Il faut observer d'abord que si l'on considère l'ensemble total des masses, abstraction faite de leurs mouvements propres, on peut toujours choisir une coordonnée de temps qui soit la ligne d'Univers de cet ensemble des masses, coordonnée qu'on peut à bon droit appeler le « temps cosmique », et corrélativement des coordonnées d'espace pur par rapport auxquelles la matière prise globalement soit immobile : en ce sens on peut continuer de parler de l'espace séparément, et se demander s'il est limité ou non.

Cela dit, il semble bien que l'accord approché des deux lois de gravitation rende aussi nécessaire dans la nouvelle théorie que dans l'ancienne la limitation de la masse totale de l'Univers si l'on veut conserver au potentiel une valeur finie en tout point de l'espace. Toutefois le problème de la répartition spatiale de la matière n'est plus comme dans la théorie classique indépendant de celui de la structure de l'espace lui-même ; en effet c'est la seule présence de la matière qui d'après les idées développées ci-dessus empêche l'E. T. d'être galiléen, et l'espace pur d'être euclidien :

répartition d'ensemble de la matière dans le monde et structure de l'espace ne sont plus que deux aspects d'un même problème.

La solution la plus simple de ce problème est à première vue la suivante : l'espace est euclidien dans son ensemble, donc il s'étend sans bornes dans toutes les directions ; là où est la matière il est courbe : il l'est à l'intérieur de la matière conformément à la loi $E_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} E = - \varkappa T_{\mu\nu}$; il l'est aussi autour de la matière, dans le vide, selon l'autre loi $E_{\mu\nu} = 0$; et sa courbure est ici d'autant plus prononcée qu'il y a dans le voisinage des masses plus grandes et plus proches. En tout cas très loin de toute masse considérable l'E. T. est galiléen et l'espace euclidien.

Mais du point de vue d'Einstein cette première solution implique trois difficultés.

La première vient du *rayonnement* : aux frontières du monde matériel l'énergie rayonnante s'en va vers l'extérieur en ligne droite puisque l'E. T. y est galiléen ; cette énergie se disperse donc comme dans la théorie classique, mais avec cette aggravation que la dispersion s'accompagne ici d'une perte de masse continuelle, toute énergie E représentant une masse m égale au quotient de E par c^2.

La seconde difficulté est d'ordre théorique [1] : considérons un corps isolé et situé très loin de tous les autres ; plongé dans une région galiléenne de l'E. T. il obéira à la loi d'inertie, et aura toujours sa masse inerte, qu'il faudrait par exemple vaincre au moyen d'une force si l'on voulait lui imprimer une accélération ; *son inertie lui appartiendra donc comme une propriété absolue.* Or, dit Einstein, ceci est contraire au postulat relativiste de Mach, d'après lequel l'inertie d'un corps devrait se définir uniquement en fonction des autres corps. Pourtant ce postulat de Mach paraît très solide du point de vue même de la nouvelle théorie de la gravitation ; il résulte en effet des nouvelles équations du mouvement d'un point matériel dans un champ gravifique que l'inertie du point se trouve influencée par la proximité ou par le mouvement des masses voisines ; en particulier sa masse inerte augmente quand d'autres masses se rapprochent de lui. Ce résultat permet sans doute une explication double de l'inertie qui consisterait à attribuer aux corps une inertie propre de caractère absolu, et à

(1) Einstein : *Quatre Conférences*, trad. Solovine, 4e Conf., p. 88-96.

dire qu'à cette inertie propre peut s'en adjoindre une autre, due à l'influence des masses voisines, et de caractère relatif ; mais il serait bien plus intelligible que, conformément aux idées de Mach, toute l'inertie d'un corps quelconque puisse s'expliquer par l'influence des autres corps de l'Univers, ceux-ci étant supposés toujours à distance finie du corps considéré, de telle manière que leur influence sur lui ne puisse jamais s'annuler.

La troisième difficulté apparaît quand on considère d'un point de vue macroscopique, c'est-à-dire ici en faisant abstraction des différences locales de densité entre les étoiles par exemple et le vide interstellaire, la *densité moyenne de tout l'Univers*, étoiles, nébuleuses et matière cosmique. Si l'on regarde en première approximation cette densité moyenne, ρ, comme constante dans le temps et dans l'espace, on démontre d'après l'équation

$$E_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} E = - \varkappa T_{\mu\nu}$$

qu'il est impossible que l'E. T. soit dans son ensemble galiléen, et par suite que l'espace soit dans son ensemble euclidien, à moins que la densité ρ soit nulle, ce qui est manifestement inadmissible (1). Il faut donc, pour cette dernière raison, renoncer à un E. T. galiléen dans son ensemble et à un espace illimité ; pourtant une telle structure d'ensemble de l'E. T. était impliquée dans les deux lois d'Einstein ; la question est alors de savoir si l'on peut substituer à ces deux lois, ou plus précisément à la formule

$$E_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} E = - \varkappa T_{\mu\nu}$$

qui contient l'une et l'autre, une formule nouvelle qui tout en présentant les mêmes avantages — conformité au principe de relativité et accord approché avec la loi de Newton — soit compatible avec une structure d'ensemble non-galiléenne de l'Univers ; nous allons voir qu'en fait une telle formule a été découverte par Einstein et que grâce à elle toutes les difficultés signalées ci-dessus, et non pas seulement la troisième, disparaissent du même coup.

La structure globale de l'espace la plus simple après la structure euclidienne, dit Einstein, paraît être celle d'*un espace à cour-*

(1) Einstein : *Sur la structure cosmologique de l'espace*, trad. Solovine, p. 102.

bure indépendante du temps et de plus constante d'un point à l'autre dans toutes les directions : si une telle courbure est positive l'espace sera l'analogue à trois dimensions de la surface d'une sphère ; il y aura un rayon de courbure de l'espace dans son ensemble, qui sera aussi le « rayon de l'Univers » — appelons-le R — ; et une courbure de l'espace égale à l'inverse du carré de ce rayon — appelons-la $\lambda = \frac{1}{R^2}$.

L'une de ces deux grandeurs devra nécessairement figurer dans la formule de la loi de gravitation modifiée dans le sens que nous venons de dire, si toutefois une telle loi est compatible avec le principe de relativité et les autres hypothèses d'Einstein.

Or il était facile de démontrer que l'addition au premier membre de l'ancienne formule

$$E_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} E = - \varkappa T_{\mu\nu}$$

d'un terme $k g_{\mu\nu}$ où k représenterait une constante universelle ayant les mêmes dimensions que E, c'est-à-dire celles d'une courbure totale, L^{-2}, n'empêcherait pas l'équation nouvelle de satisfaire à toutes les conditions qui avaient permis de déduire la première équation ; en particulier d'être tensorielle comme le veut le principe de relativité, et de comporter à son premier membre un tenseur de divergence nulle comme l'exige le principe de conservation de l'impulsion-énergie. Il était donc permis d'introduire dans la première formule un terme en $\lambda g_{\mu\nu}$, λ étant la courbure d'ensemble de l'espace, et d'écrire ainsi la loi de gravitation modifiée :

$$E_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} E + \lambda g_{\mu\nu} = - \varkappa T_{\mu\nu}$$

Ce que fit Einstein dès 1917 [1].

Voyons maintenant les conséquences de la nouvelle formule : d'abord une densité moyenne de la matière plus grande que 0 était possible ; et cette densité était liée à la courbure λ par la relation $\lambda = \frac{2\pi G \rho}{c^2}$, où G représente toujours la constante de la gravitation ; on pouvait dire que la courbure d'ensemble de l'espace était déterminée par la densité moyenne de la matière universelle et les courbures locales par la répartition de cette matière.

---

[1] Einstein : *Kosmologische Betrachtungen*. Rel. Prinzip., p. 138.

Ensuite l'Univers spatial ressemblant, au nombre près des dimensions, à une surface sphérique, les rayons lumineux devaient y suivre, en gros, des trajectoires circulaires, ce qui supprimait pour l'ensemble du monde toute perte d'énergie et de masse. Enfin il n'y avait plus de régions de l'espace situées à distance infinie de toute masse ; la distance maxima de deux corps était finie, comme son analogue sur la sphère, c'est-à-dire la moitié d'un grand cercle, et cette distance était au plus égale à πR, R étant le rayon de l'Univers. Le comportement d'un corps quelconque, toujours déterminé par la structure de l'E. T., dépendait donc partout uniquement de la présence des autres corps, puisque même isolé d'eux le plus possible il devait obéir encore aux lois de la structure d'ensemble, elle-même déterminée par la densité moyenne de la matière universelle ; et ceci était conforme au postulat de Mach.

Quant à l'accord approché de la nouvelle théorie d'Einstein avec la théorie classique il suffisait pour le maintenir de postuler que λ était suffisamment petit, c'est-à-dire que la densité moyenne de la matière était négligeable par rapport à la densité des astres ; ce qui, étant donnée l'énormité des distances interstellaires par rapport aux diamètres des étoiles, était parfaitement vraisemblable. Des évaluations tentées plus tard de la densité moyenne ρ, et par elle de la courbure λ et du rayon R, montrèrent qu'effectivement il n'y avait pas lieu en pratique de tenir compte du terme en λ de la nouvelle formule pour le calcul précis des conséquences de la théorie relatives au champ créé par le soleil.

Mentionnons pour finir une autre conception relativiste de l'ensemble de l'Univers : celle de l'astronome de Sitter (1917). Pour Einstein les lignes de temps des particules matérielles, abstraction faite de leurs mouvements propres, sont des droites parallèles — ce qui correspond à l'existence d'un temps cosmique absolu ; l'espace seul est courbe, et sa courbure est déterminée comme nous l'avons dit par la densité moyenne de la matière universelle ; réduit à deux dimensions l'E. T. d'Einstein aurait pour représentation géométrique un cylindre dont les génératrices seraient les lignes de temps et dont les parallèles constitueraient l'espace aux différents instants. Pour de Sitter, les lignes de temps ne sont pas plus des droites que les lignes d'espace ; le temps aussi est courbe ; et la courbure de l'E. T. est indépendante

de la densité de la matière (1). De la courbure du temps dans l'Univers de de Sitter on déduisit cette conséquence que la durée d'un phénomène déterminé observé de très loin devait paraître plus longue que la durée d'un phénomène identique observé sur place, et que par exemple les vibrations lumineuses des astres lointains devaient nous apparaître plus lentes que les vibrations terrestres correspondantes (2). Nous verrons plus loin l'intérêt de cette conséquence.

Article XIII

L'ESPACE-TEMPS GRAVITATIONNEL ET L'EXPÉRIENCE

104. Séparation nécessaire de l'espace et du temps dans nos observations et nos mesures. — L'accord approximatif de la nouvelle loi avec la loi de Newton était nécessaire du point de vue relativiste puisque la loi de Newton a pour elle depuis longtemps la consécration de l'expérience ; mais le fait même que l'accord n'était obtenu qu'au moyen d'approximations laissait prévoir de petites différences dans les conséquences rigoureuses des deux lois : ces différences étaient-elles susceptibles d'un contrôle expérimental : si oui, allaient-elles être vérifiées ?

L'énoncé même de ce problème oblige à poser une question préalable : comment faire pour vérifier rigoureusement une loi spatio-temporelle ? Tant qu'on se bornait à un contrôle approximatif les choses étaient relativement simples : il suffisait de choisir des coordonnées spatio-temporelles qui correspondent à peu près à l'emploi d'un système de référence d'inertie et du temps de ce système ; si bien que le mouvement exprimé au moyen de ces coordonnées équivalait à peu près à un mouvement classique relatif à un système d'inertie : on simplifiait ainsi la loi pour pouvoir rapporter les mouvements qu'elle déterminait à un système de référence au sens ancien.

Or l'une des caractéristiques de ces systèmes de référence est

(1) Voir J. Becquerel : *Le Principe de Relativité et la Théorie de la gravitation*, p. 291 et suivantes.

(2) *Ibidem*, p. 298.

que leur emploi suppose une séparation rigoureuse de l'espace et du temps, c'est-à-dire la possibilité de mesurer directement et dans toute l'étendue d'un même système des distances pures et des durées pures. Et nous savons qu'à l'encontre la théorie générale d'Einstein repose sur l'emploi systématique de coordonnées spatio-temporelles quelconques, c'est-à-dire qui permettent bien de situer tout événement dans l'E. T. et d'exprimer toujours l'intervalle spatio-temporel entre deux événements donnés, mais qui dans le cas général n'impliquent pas de séparation entre distances pures et durées pures.

La loi d'Einstein prise dans sa rigueur va-t-elle donc nous mettre en présence exclusivement de relations spatio-temporelles impossibles à dissocier ? S'il en était ainsi il nous faudrait, pour pouvoir la confronter avec l'expérience, savoir effectuer des mesures directes d'intervalles d'E. T. ; en fait nous ne savons pas le faire ; tout ce que nous connaissons de la réalité physique, et des mouvements des corps en particulier, provient de mesures *séparées* de durées et de distances.

Le problème se pose donc de la possibilité d'un rapprochement entre ces mesures de temps pur ou d'espace pur et les grandeurs admises explicitement dans la nouvelle théorie : essayons de voir comment il peut se résoudre.

105. Nécessité pour le contrôle de la théorie de coordonnées qui séparent le temps de l'espace. — Précisons d'abord la façon dont la théorie *classique* de la gravitation se confronte avec l'expérience : nous nous bornons à l'Astronomie du système solaire, et même, pour simplifier, au mouvement d'une seule planète en présence du soleil supposé fixe.

La théorie, après avoir défini l'attraction exercée sur la planète par le soleil, déduit de la loi $\gamma = \frac{f}{m}$ l'accélération que cette planète subira relativement à un système d'inertie ; c'est alors la loi différentielle du mouvement de la planète, sous la forme d'équations différentielles du second ordre où le temps joue le rôle de variable indépendante ; pour obtenir l'équation finie de la trajectoire sous la forme de relations entre les coordonnées d'espace, on élimine le temps entre les équations différentielles du mouvement et l'on intègre ; enfin pour obtenir la loi du mouvement sur la trajectoire,

sous la forme de relations finies entre les coordonnées d'espace et le temps, on isole dt dans les équations différentielles, on intègre, et l'on tient compte des conditions initiales de position et de vitesse.

Mais tout cela implique le recours à un système d'inertie autant que possible lié au soleil, pour supprimer toute vitesse parasite, et surtout auquel on puisse se référer dans les observations. Si l'on ne pouvait observer que les astres solaires, il serait très malaisé de vérifier la loi de gravitation ; on n'y arriverait tout au plus que par une induction laborieuse ; heureusement, le système d'inertie théorique se trouve à peu près réalisé matériellement par l'ensemble des étoiles ; et c'est effectivement par rapport aux étoiles qu'on repère d'abord les positions apparentes du soleil et de la planète vus de la Terre ; ensuite, en tenant compte principalement du mouvement de la Terre, les positions vraies du soleil et de la planète : la position vraie du soleil est à peu près invariable par rapport aux étoiles ; quant aux positions vraies de la planète elles varient au cours du temps et c'est en étudiant leur succession qu'on peut contrôler si le mouvement de l'astre est bien conforme à la théorie.

Maintenant, que supposent ces observations immédiates, et cette déduction des positions vraies à partir des positions apparentes ? Elles supposent essentiellement des mesures directes de durées, qui permettent de dater par rapport à un instant origine toutes les positions observées ; et des mesures directes de longueurs, qui permettent de calculer à n'importe quel instant les distances au soleil de la terre et de la planète.

Les durées se mesurent aisément grâce à l'uniformité de la rotation de la Terre autour de son axe par rapport à l'ensemble des étoiles.

Pour les distances, on les calcule d'après les principes de la trigonométrie, eux-mêmes conformes aux principes de la géométrie d'Euclide ; c'est-à-dire qu'on les déduit d'une longueur de base mesurée directement une fois pour toutes, et de mesures d'angles. La longueur de base fondamentale est la distance de deux points de la surface terrestre relativement rapprochés, d'où l'on déduit d'abord la longueur d'un arc de méridien terrestre, puis celle du rayon équatorial de la Terre ; les angles sont obtenus par des visées d'objets terrestres ou par des visées d'astres, ce qui

suppose valable partout la loi de la propagation rectiligne de la lumière dans le vide ou dans un milieu homogène. Du rayon de la Terre et de la parallaxe solaire on déduit pareillement la distance de la Terre au Soleil ; de cette distance et d'observations combinées des deux astres on déduit la distance de la planète au Soleil.

Tout cela est relativement simple, parce que pour les classiques le temps mesuré par la rotation de la Terre — le temps terrestre — *est valable partout ; que la gravitation n'influence pas la marche des rayons lumineux et que dans tout l'espace règne la métrique euclidienne.*

Plaçons-nous maintenant au point de vue *relativiste* : ici la théorie devra déterminer en premier lieu la courbure qu'impose à l'E. T. la présence du Soleil ; de cette courbure se déduiront les équations des géodésiques ; et le mouvement de la planète sera connu sous forme différentielle par ces équations.

La question est de raccorder le mouvement théorique ainsi défini au seul mouvement observable, c'est-à-dire au mouvement relatif à l'ensemble des étoiles. Si l'on veut retrouver l'équivalent des équations finies du mouvement classique, il faudra intégrer les équations des géodésiques ; et tenir compte de conditions initiales observables.

Mais si les coordonnées spatio-temporelles choisies sont quelconques l'intégration ne pourra donner ni la forme d'une trajectoire spatiale ni la loi de son parcours par la planète au cours du temps ; seules des coordonnées dont trois soient des coordonnées *d'espace pur*, la quatrième étant une coordonnée *de temps pur*, permettront d'aboutir par intégration à des relations entre les coordonnées d'espace qui constituent l'équation d'une trajectoire, et à des relations entre les coordonnées d'espace et la coordonnée de temps qui fournissent la loi finie du mouvement.

Le point important est donc de savoir à quelles conditions un choix de coordonnées de ce genre est possible : du point de vue mathématique il suffit que l'une des quatre coordonnées, $x_4 = t$ par exemple, étant choisie comme coordonnée de temps pur, les trois autres, x_1, x_2, x_3, lui soient orthogonales, c'est-à-dire que dans le ds^2 il n'y ait pas de terme rectangle où dt figure avec la différentielle d'une autre coordonnée, les termes d'espace étant d'ailleurs précédés du signe $+$ et le terme de temps du signe $-$;

les trois coordonnées x_1, x_2, x_3, sont alors des coordonnées d'espace pur.

Ceci ne veut pas dire qu'étant donnés par exemple deux événements quelconques ayant mêmes coordonnées d'espace la différence Δt de leur coordonnée t sera la durée mesurable d qui d'après la théorie sépare ces événements ; mais on pourra établir une relation entre Δt et d. On peut en dire autant de la différence des coordonnées spatiales de deux événements qui auraient même coordonnée t, et de la distance mesurable l qui, d'après la théorie toujours, sépare les points où ces événements ont lieu.

Maintenant, quel rapport y aura-t-il entre la durée théorique d, ou la variable t, et le temps observable ? Quel sera le rapport de la distance théorique l ou de la résultante des différences entre les coordonnées d'espace, et la distance classique mesurée ou calculée, car il faudra bien se faire une idée de ces rapports si l'on veut confronter les conséquences de la théorie avec les observations ?

La réponse à cette double question dépendra, on le comprend, de la façon dont sont mesurés ou calculés dans chaque problème la distance et le temps : nous nous contenterons de montrer dans ce qui suit comment le problème se résout dans le seul cas concret que nous ayons à envisager, celui d'une planète soumise au champ créé par le soleil seul.

106. Champ de gravitation d'une seule masse attirante : le ds^2 de Schwarzschild dans le vide. — La confrontation de la théorie relativiste de la gravitation avec l'expérience supposait avant tout la solution *rigoureuse* des équations d'Einstein appliquées aux mouvements planétaires : problème difficile dans sa généralité, comme tous ceux où il s'agit d'intégrer des équations différentielles. Cependant on pouvait espérer le résoudre dans certains cas particulièrement simples, correspondant aux cas les plus simples de la théorie classique, et avant tout à celui d'un point matériel mis en présence d'une seule masse attirante assez grande pour être considérée elle-même comme fixe.

Dès 1916 Schwarzschild donna une solution des équations d'Einstein pour ce dernier cas qui est précisément celui d'une planète soumise à l'influence prépondérante du soleil, les influences des autres planètes sur son mouvement étant négli-

gées [1]. Nous allons faire connaître cette solution de Schwarzschild, et c'est d'elle que nous déduirons les conséquences de la théorie qu'on a pu soumettre au contrôle des observations, bien qu'en fait Einstein les eût déduites, d'une façon moins rigoureuse, indépendamment de la solution de Schwarzschild et avant de la connaître.

Nous nous supposons dans le vide à une certaine distance d'une masse attirante M que nous supposons pour le moment réduite à un point ; comment l'E. T. est-il déformé — par rapport à la structure galiléenne qu'il aurait en l'absence de toute masse — du fait que M existe ? La réponse est impliquée dans la loi $E_{\mu\nu} = 0$ qui s'applique en tout point du vide et qui, étant donnée la petitesse du terme en λ dans la formule modifiée, peut être ici considérée comme exacte. Il s'agit donc de découvrir une solution de cette équation qui réponde au cas d'une seule masse ; d'une façon plus précise il s'agit de découvrir la forme qu'impose au ds^2 la présence de la masse M en tout point de sa sphère d'influence.

D'ailleurs, d'après ce qui a été dit plus haut, il faut si l'on veut rejoindre les données observables exprimer ce ds^2 au moyen de coordonnées qui séparent le temps de l'espace. Le raccord avec l'expérience devant nécessairement exiger l'utilisation du système d'inertie constitué par l'ensemble des étoiles — disons du système stellaire — il est tout indiqué de *prendre pour ligne de temps pur la ligne d'Univers de la masse attirante*, puisque cette masse représente le soleil, lequel en astronomie solaire est regardé comme fixe par rapport aux étoiles.

Appelons t la coordonnée correspondante : si nous voulons que les trois autres coordonnées soient purement spatiales, il faut qu'elles soient orthogonales à la ligne t seule variable, c'est-à-dire que le ds^2 ne contienne pas de termes rectangles en dt. Mais nous pouvons imposer d'autres conditions à nos coordonnées d'espace : si en effet nous faisons de l'E. T. créé par la masse M une coupe t = constante, nous devons obtenir quel que soit t *un espace à symétrie sphérique par rapport à la position de* M, car il n'y a rien d'autre que M qui puisse le déformer ; il est dès lors naturel de

---

(1) K. Schwarzschild : *Das Gravitationsfeld eines Massenpunktes*. Berliner Sitzungsberichte, 1916, p. 189-196.

choisir des coordonnées d'espace adaptées à cette symétrie, c'est-à-dire des coordonnées *polaires* à l'origine desquelles la masse M soit constamment immobile.

Quel serait le dl^2 d'un espace *euclidien* en coordonnées polaires ? En coordonnées cartésiennes rectangulaires on a

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2\,;$$

par rapport à des coordonnées polaires r, φ, θ, r étant le rayon vecteur, φ la longitude, et θ la colatitude, c'est-à-dire le complément de la latitude λ, ou $\frac{\pi}{2} - \lambda$, on a :

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \varphi. \end{aligned}$$

Pour obtenir la nouvelle expression du dl^2 il faut calculer les différentielles totales dx, dy et dz par rapport à r, θ et φ, et faire la somme de leurs carrés ; on obtient

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2.$$

Ces coordonnées d'espace sont orthogonales entre elles, ce qui se manifeste par l'absence de termes rectangles en $drd\theta$, $drd\varphi$ et $d\varphi d\theta$. Dans un E. T. galiléen le ds^2 s'obtient à partir du dl^2 spatial par adjonction du terme $- c^2dt^2$. En ajoutant ce terme à notre dl^2 nous aurons le ds^2 d'un E. T. *galiléen* en coordonnées polaires :

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 - c^2dt^2.$$

Si nous comparons cette formule avec la formule générale du ds^2, nous voyons que

$$x_1 = r, \qquad x_2 = \theta, \qquad x_3 = \varphi, \qquad \text{et} \qquad x_4 = t$$

ou mieux $x_4 = ct$; et que

$$g_{11} = 1, \qquad g_{22} = r^2, \qquad g_{33} = r^2 \sin^2 \theta, \qquad \text{et} \qquad g_{44} = -1\,;$$

et que tous les autres $g_{\mu\nu}$ sont nuls.

Mais notre E. T. n'est pas galiléen, puisque la masse M le déforme, ni notre espace euclidien ; cependant en raison de la symétrie sphérique de cet espace par rapport à la position de M nous sommes invités à garder nos quatre coordonnées r, θ, φ et t, quitte à affecter les termes du ds^2 de nouveaux coefficients $g_{\mu\nu}$. Nous pou-

vons donc déjà écrire notre ds^2 sous la forme indéterminée que voici :

$$ds^2 = g_{11}dr^2 + g_{22}d\theta^2 + g_{33}\,d\varphi^2 - g_{44}c^2dt^2,$$

et le tout est de savoir comment la courbure de l'E. T. va se manifester par les valeurs des coefficients g.

C'est la symétrie spatiale de l'espace par rapport à la position de M qui va nous faire trouver la réponse. Faisons d'abord une remarque au sujet des termes en $d\theta^2$ et $d\varphi^2$: il semblerait à première vue que la symétrie sphérique de l'espace doive exclure les termes $d\theta^2$ et $d\varphi^2$ eux-mêmes, qui paraissent faire dépendre le ds^2 de la direction ; mais il n'en est rien : d'une part en effet la présence de ces termes est nécessaire du fait qu'il faut bien rapporter les coordonnées intrinsèques d'une sphère à des pôles ; d'autre part les termes en question ne brisent pas en réalité la symétrie, à condition de ne figurer dans le ds^2 que réunis dans l'expression $d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2$, qui, au facteur r^2 près, représente pour une région quelconque de la sphère le carré de l'élément de grand cercle. Nous pouvons donc et nous devons garder $d\theta^2$ et $d\varphi^2$ dans notre formule, groupés comme nous venons de dire ; ceci réduit à trois le nombre des termes réellement séparables de notre ds^2, et nous n'avons plus que trois coefficients distincts à déterminer.

La fixité de la masse à l'origine des coordonnées d'espace signifie que *les coordonnées spatiales de M sont indépendantes de la coordonnée temporelle t* ; et elle entraîne la même indépendance par rapport à t du « champ » créé par M dans l'espace : on dit que *ce champ est statique.* Or si t figurait dans les coefficients du ds^2 les composantes du champ varieraient dans l'espace en fonction de t ; t n'y figurera donc pas : on exprimera cette condition en disant *que le ds^2 lui-même est statique.*

Par contre le champ devant, pour toute valeur de t, dépendre de la *distance spatiale à la masse M*, puisque c'est seulement à distance infinie de cette masse qu'il est nul, les coefficients seront fonction de cette distance, et, à cause de la symétrie, d'elle seule. Il est vrai que la coordonnée r qui dans notre formule correspond au rayon vecteur euclidien ne représente sans doute pas la distance radiale mesurable ; cependant comme cette coordonnée n'est fonction que de cette distance, les coefficients cherchés seront eux aussi fonction de la seule coordonnée r.

Voici donc comment nous pouvons écrire maintenant notre ds^2 :

$$ds^2 = f_1(r)dr^2 + f_2(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - f_3(r)c^2dt^2.$$

Ces trois fonctions de r devant être positives, on peut les mettre sous forme exponentielle, et écrire

$$ds^2 = e^l dr^2 + e^m r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - e^n c^2dt^2.$$

Mais la variable r n'est définie jusqu'ici que comme fonction de la seule distance radiale, et nous pouvons la supposer telle qu'une des fonctions exponentielles soit égale à l'unité ; admettons que ce soit le cas pour e^m ; nous avons alors

$$ds^2 = e^l dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - e^n c^2dt^2,$$

et il ne nous reste à déterminer que deux fonctions de r, l et n.

C'est ici qu'intervient la loi de la gravitation pour le vide : nos deux fonctions doivent être telles que l'équation symbolique $E_{\mu\nu} = 0$ soit satisfaite.

$E_{\mu\nu}$ se déduit des $g_{\mu\nu}$ dans le cas général d'abord par certaines dérivations qui donnent le tenseur de Riemann-Christoffel, ensuite par contraction, ce qui donne $E_{\mu\nu}$. Ici nous n'avons que quatre $g_{\mu\nu}$ différents de 0 :

$$g_{11} = e^l, \qquad g_{22} = r^2, \qquad g_{33} = r^2 \sin^2\theta, \qquad \text{et} \qquad g_{44} = e^n.$$

C'est à partir de ces valeurs des $g_{\mu\nu}$ qu'on calcule le tenseur de Riemann-Christoffel, puis le tenseur $E_{\mu\nu}$; et l'on écrit que toutes les composantes de ce dernier tenseur sont nulles. Le résultat est une équation différentielle contenant l et n ; mais on montre que le fait qu'à une distance infinie du centre g_{11} et g_{44} doivent avoir avec les coordonnées choisies les valeurs 1 et — 1 exige l'égalité $l = -n$; de cette égalité, et de la condition que l'une des composantes de $E_{\mu\nu}$, à savoir E_{22}, doit être nulle, comme les autres d'ailleurs, on tire, en posant $e^n = \gamma$,

$$\gamma + r\frac{d\gamma}{dr} = 1.$$

L'intégration de cette équation donne $\gamma = 1 - \frac{2A}{r}$, A étant la constante d'intégration.

Que peut être cette constante ? Elle doit dépendre de la masse M qui détermine le champ, puisque deux masses différentes

doivent produire des champs d'intensités différentes. D'autre part d'après la loi classique le champ est en raison à la fois de la grandeur de la masse et de la constante de la gravitation G, autrement dit du produit GM. Enfin comme A a les dimensions d'une longueur, puisque $\frac{2A}{r}$ est un nombre comme 1, le rapport de GM à A, on le constate aisément, a les dimensions du carré d'une vitesse, et d'une vitesse qui doit aussi être une constante ; il est donc indiqué d'introduire ici la vitesse de la lumière et de poser $A = \frac{2GM}{c^2}$, ce qui donne pour le facteur numérique γ la valeur $1 - \frac{2GM}{c^2 r}$.

Il suffit maintenant de remplacer dans l'expression du ds^2 e^n par γ, et, puisque $n = -l$,

$$e^l \text{ par } \frac{1}{\gamma} \text{ ou } \gamma^{-1},$$

pour obtenir le ds^2 en fonction de r, θ et φ, de M et des constantes universelles G et c :

$$ds^2 = \gamma^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - \gamma c^2 dt^2,$$

ou

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2.$$

C'est là aux notations près le ds^2 de Schwarzschild qui exprime les propriétés de l'E. T. déformé par la masse M (1).

107. Le ds^2 de Schwarzschild à l'intérieur de la masse attirante. — La formule que nous venons d'obtenir contient le facteur $1 - \frac{2GM}{c^2 r}$ où r seul est variable. Ce facteur affecte les carrés des différentielles des coordonnées ; quand il s'agira de calculs portant sur les différentielles elles-mêmes, dr ou dt par exemple, il fera place à sa racine carrée,

$$\sqrt{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}.$$

Or ce nouveau facteur n'a de sens qu'autant que la quantité sous le radical est positive ; c'est-à-dire qu'autant que l'on a

(1) K. Schwarzschild : *Ibidem*, p. 194.

$1 - \frac{2GM}{c^2r} > 0$; la même condition résulte d'ailleurs de ce que dans le ds^2 le coefficient g_{44}, ici $1 - \frac{2GM}{c^2r}$, doit être toujours positif.

Il nous faut donc

$$1 > \frac{2GM}{c^2r}, \quad \text{ou} \quad r > \frac{2GM}{c^2}.$$

Quand r a la valeur $\frac{2GM}{c^2}$, que nous appellerons r_0, ou une valeur inférieure, la formule de Schwarzschild ne peut plus s'appliquer, et comme r est fonction de la seule distance du point où l'on se place à la masse attirante, la formule a pour limite d'application une surface sphérique dont tous les points ont une coordonnée r de valeur r_0.

Toutefois on est en droit de supposer que dans tous les cas concrets, où la masse attirante n'est évidemment jamais réduite à un point, mais remplit un volume, la barrière sphérique définie par la valeur critique r_0 ne se trouve pas à l'extérieur de la masse ; si bien que pour établir la forme du ds^2 à l'intérieur de la barrière il faut appliquer non plus la loi pour le vide $E_{\mu\nu} = 0$, mais la loi pour la matière,

$$E_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}E = - \varkappa T_{\mu\nu}.$$

Si d'ailleurs la barrière théorique se trouvait à l'intérieur de la masse matérielle, cette seconde loi s'appliquerait bien entendu jusqu'à la frontière de cette masse, la loi $E_{\mu\nu} = 0$ n'étant valable qu'au delà de cette frontière, dans le vide.

C'est encore Schwarzschild (¹) qui le premier a donné la formule du ds^2 pour l'intérieur de la matière, en supposant la masse attirante sphérique, de densité constante et dépourvue de mouvements internes, toutes hypothèses qui simplifiaient l'expression du tenseur matériel $T_{\mu\nu}$.

Avec les mêmes coordonnées que pour le cas du vide la formule établie par Schwarzschild équivaut à la suivante, où R représente non pas le rayon réel de la masse sphérique, mais le quotient par

---

(¹) K. Schwarzschild : *Über das Gravitationsfeld einer Kugel.* Berliner Sitzungsberichte, 1916, p. 424-434.

2π de la circonférence d'un grand cercle de la surface de cette masse (¹) :

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2GMr^2}{c^2R^3}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

$$+ \frac{c^2}{4}\left(3\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2R}} - \sqrt{1 - \frac{2GMr^2}{c^2R^3}}\right)^2 dt^2.$$

Par opposition au ds^2 du vide, ou ds^2 *extérieur*, cette formule s'appelle le ds^2 *intérieur* de Schwarzschild.

Dans le ds^2 extérieur, la distance critique r_0 est proportionnelle à la masse M ; pour une masse sphérique de grandeur donnée plus la densité est grande, plus le rayon est petit ; aussi la barrière, supposée intérieure à la masse, est-elle d'autant plus proche de la frontière que la densité est plus élevée. La théorie conduit donc à postuler une limite supérieure de la densité de la matière, à savoir une densité tellement grande que la barrière devrait tomber dans le vide.

108. Les coordonnées de Schwarzschild et le système de référence stellaire. — Nous ne pourrons déduire des formules de Schwarzschild aucune conséquence observable tant que nous n'aurons pas établi une relation entre l'usage des coordonnées qui figurent dans ces formules et le mode de description des phénomènes qui pratiquement s'impose à nous en Astronomie. Heureusement la relation dont il s'agit est en définitive assez simple.

La masse M de l'E. T. de Schwarzschild est seule à créer le champ de gravitation ; aussi à une distance spatiale infinie de cette masse, distance pour laquelle la variable r serait elle-même infinie, le facteur $\gamma = 1 - \frac{2GM}{c^2r}$ serait rigoureusement égal à l'unité, l'espace, rigoureusement euclidien et l'E. T., rigoureusement galiléen.

Comme d'ailleurs la différence entre γ et l'unité décroît constamment avec la distance, on peut admettre qu'à une distance finie mais suffisamment grande la différence entre γ et 1 devient négligeable, surtout eu égard à l'imperfection de nos mesures

---

(¹) J. Becquerel : *Champ de gravitation d'une sphère matérielle et signification physique de la formule de Schwarzschild*, Paris, 1923, I, p. 2.

et observations ; si bien qu'il y a pratiquement dans l'espace autour de la région déformée par la masse M et à distance finie de cette masse un espace euclidien auquel correspond un E. T. galiléen. Rapporter cet E. T. à des coordonnées galiléennes équivaut à choisir un système d'inertie de la relativité restreinte ; et l'on peut dire que la masse M occupe, avec la portion de l'espace qu'elle déforme, une région limitée de ce système d'inertie qui l'entoure.

Si au lieu de la masse théorique M nous considérons le soleil la conclusion est la même : dans l'espace, à une distance assez grande déjà pour que le champ du soleil puisse être considéré comme nul et cependant assez petite encore pour que le champ créé par les étoiles y soit négligeable, l'espace est euclidien et l'E. T. galiléen ; et le système d'inertie que définissent dans cet E. T. des coordonnées galiléennes serait un système d'inertie lié au centre du soleil. Comme le mouvement propre du système solaire est à peine sensible dans les observations astronomiques courantes on peut en faire abstraction ici, et dire que du point de vue de la nouvelle théorie la région de l'espace déformée par le soleil apparaît comme liée dans son ensemble au système d'inertie constitué par les étoiles.

Mais c'est précisément à ce même système d'inertie que nous rapportons toutes nos observations en Astronomie planétaire : notre temps classique T est valable dans tout ce système ; et nos distances classiques L sont des distances comptées dans ce système. Par où l'on entrevoit la possibilité d'un rapprochement entre des lois physiques exprimées à l'aide des coordonnées de Schwarzschild et les lois telles qu'elles se présentent à nous dans le système d'inertie stellaire.

Pour préciser le rapprochement, comparons les deux modes de repérage de l'espace : sans doute on ne saurait identifier aucun système de coordonnées classiques — lesquelles supposeraient un espace *partout* euclidien — avec les coordonnées de Schwarzschild qui concernent un espace non-euclidien : mais on peut définir des coordonnées classiques du même genre que celles de Schwarzschild, et de même origine qu'elles, à savoir des coordonnées polaires centrées sur le soleil [1] ; et ce sont même là

(1) Si l'on supposait à la place du soleil un point P sans masse appréciable

les coordonnées les plus usuelles pour l'étude des mouvements planétaires dans les cas simples.

Aussi, les coordonnées θ et φ de Schwarzschild représentant comme nous le verrons bientôt des directions de l'espace au même titre que les coordonnées classiques de même nom, les seules différences à prévoir entre distances classiques et vraies distances de l'espace de Schwarzschild concerneront les distances *radiales*. De plus toutes les conséquences du ds^2 de Schwarzschild qui s'exprimeront relativement aux coordonnées r, θ et φ par une certaine différence d'angle au centre, $\Delta\varphi$ par exemple, se traduiront dans notre système de référence usuel par une différence d'angle égale : on verra par la suite que ces corollaires sont d'une importance capitale dans la question du raccord de la théorie d'Einstein avec l'expérience.

109. Unités de longueur et de temps dans un E. T. non galiléen. — L'utilisation des formules de Schwarzschild suppose aussi qu'on sache interpréter du point de vue de la physique relativiste les variables qu'elles contiennent, c'est-à-dire établir des relations entre les différences de ces variables et les grandeurs physiques correspondantes.

Pour nous guider dans cette interprétation rappelons d'abord quelques principes de la géométrie intrinsèque des surfaces, puisque la nouvelle physique repose sur des principes analogues. Dans la géométrie de Gauss la quantité dl, distance de deux points infiniment voisins, doit être comptée *dans le plan tangent* à la surface et regardée comme rectiligne ; de fait, tant qu'il s'agit de deux points très voisins il n'y a pas de différence entre la surface et le plan tangent, tout le procédé de Gauss consistant à substituer à la surface l'ensemble de ses plans tangents et leur connexion d'un point à l'autre.

Mais dl n'est qu'une distance infinitésimale ; toute distance finie, l, est une somme de distances élémentaires qui, elle, n'a de sens que sur la surface et s'obtient par intégration. Si du reste la sommation est possible c'est précisément parce que les

---

et de même mouvement que le centre du soleil, ce point laisserait à l'espace sa structure euclidienne. Alors les coordonnées d'espace de Schwarzschild auraient pour projections dans cet espace euclidien fictif des coordonnées polaires ayant constamment le point P pour origine.

différents dl qui constituent la distance finie l, tout en appartenant à des plans différents quant à l'orientation ont ceci de commun qu'ils appartiennent tous à des plans, sont tous rectilignes, et par suite peuvent s'additionner. Le dl^2 de Gauss s'exprime en fonction des différentielles du et dv, ou dx_1 et dx_2, et des coefficients $g_{\mu\nu}$: que représentent ces différentielles ? — Des différences de coordonnées qui peuvent être de simples nombres ou des longueurs, suivant que les $g_{\mu\nu}$ correspondants représentent eux-mêmes des longueurs ou de simples nombres, le produit de $g_{\mu\nu}$ par $dx_\mu dx_\nu$ devant toujours avoir les dimensions du carré d'une longueur, comme la quantité dl^2 elle-même. Supposons que dx_1 soit une longueur : cette longueur sera elle aussi une petite distance *rectiligne*, à savoir la distance de deux points très voisins qui ne diffèrent que par la coordonnée x_1 et qui, toujours, sont considérés comme appartenant au plan tangent. Du reste les relations entre dl et dx_1 ou dx_2 dépendront à la fois de la nature de la surface et du choix des coordonnées et varieront en général d'un point à un autre.

Nous venons de considérer dl, dx_1 et dx_2 comme des quantités très petites et indéterminées, ce qui s'impose du point de vue de l'analyse. Si pour nous rapprocher de la physique nous nous placions au point de vue de la *mesure* directe, nous devrions substituer à nos différentielles indéterminées des distances très petites, comparables entre elles afin qu'on puisse les additionner, et qui pour cela soient rectilignes elles aussi, et par suite considérées comme appartenant chacune à un plan tangent à la surface. Comme de telles distances, rectilignes et très petites, ne peuvent être mesurées qu'au moyen d'unités elles-mêmes rectilignes et très petites, *le plus simple est de substituer dans les raisonnements aux différentielles ces petites unités.*

Dans ces conditions tout ce que nous avons dit de dl, dx_1 et dx_2, et de leurs relations, restera vrai dans tout petit domaine de nos petites unités de longueur. Quant aux distances finies elles s'obtiendront par mesure directe sur la surface au moyen d'une même unité, dl, ou dx_1, ou dx_2 ; et le résultat de ces mesures diffèrera d'autant moins du résultat de l'intégration que les unités employées seront plus petites.

Dans la physique d'Einstein, il ne peut être question de grandeurs infinitésimales que dans les calculs. Comme il ne s'agit pas

de construire simplement un E. T., mais de vérifier si la réalité objective que l'on étudie obéit bien aux lois de telle géométrie spatio-temporelle, on est obligé de se placer au point de vue de la mesure directe, ce qui suppose l'usage tout au moins théorique d'unités déterminées, et qui soient assez petites pour être considérées comme définies dans l'E. T. galiléen tangent et utilisables en n'importe quel « point » de l'Univers.

En conséquence il semble au premier abord que nous soyons conduits à transposer simplement ce que nous venons de dire des unités géométriques : il en serait ainsi si nous pouvions réaliser une petite unité d'intervalle spatio-temporel ds, car les intervalles seuls sont absolument indépendants du choix des coordonnées et correspondent seuls aux longueurs invariantes dl de la géométrie pure ; mais le fait que nous ne pouvons obtenir un intervalle en général que par deux mesures combinées, l'une de temps, l'autre d'espace, change l'aspect de la question.

Comme nous l'avons dit plus haut nous devons supposer l'E. T. rapporté à des coordonnées d'espace pur et de temps pur ; et c'est seulement au sujet, séparément, des petites distances et des petites durées correspondant aux différentielles de ces coordonnées que nous allons pouvoir répéter ce que nous avons dit des petites unités géométriques et de leur usage. Ces unités devaient être rectilignes et se définir comme éléments d'un plan. D'une manière analogue nos unités physiques de longueur et de durée devront se définir comme grandeurs élémentaires d'un E. T. galiléen, à savoir l'E. T. de la relativité restreinte dont les lois sont valables dans le voisinage immédiat de tout point de l'E. T. non galiléen.

Une petite durée définie physiquement dans cet E. T. pourra donc servir partout et toujours d'unité de temps. Il se trouve que nous connaissons de ces petites durées : les périodes des vibrations lumineuses quand elles sont émises dans des conditions normales, c'est-à-dire sans qu'aucune influence extérieure ne complique le phénomène de l'émission. L'une d'elles, déterminée n'importe où par un atome immobile relativement au champ, pourra jouer le rôle d'unité de temps valable pour des mesures locales de durées en tout point de l'Univers. De même, étant donnée la constance de la vitesse de la lumière dans tous les systèmes d'inertie, la longueur d'onde d'une radiation déterminée émise

dans les conditions normales par un atome immobile pourra servir partout et toujours d'unité pour les mesures locales de longueur (¹).

Les petites unités ainsi définies, il est aisé de définir les longueurs et les durées plus grandes : la distance suivant tel itinéraire de deux points éloignés — ces deux points étant le théâtre de deux événements simultanés, c'est-à-dire de même coordonnée de temps — se définira par intégration, et s'obtiendra directement par la mesure au moyen d'une même petite unité de longueur.

La durée qui sépare deux instants éloignés, ces deux instants étant les dates de deux événements isotopes, se définira aussi par intégration et s'obtiendra de même par mesure directe au moyen d'une horloge dont la période réalisera la petite unité de temps.

Ces principes posés nous allons voir comment ils s'appliquent d'abord aux durées ensuite aux longueurs de l'E. T. de Schwarzschild.

110. Relations entre la variable t de Schwarzschild et la vraie durée relativiste d. — Nous pouvons ici nous contenter de raisonner sur le ds^2 extérieur. La façon même dont a été établi ce ds^2 nous apprend que t est une variable purement temporelle, et qu'elle a les dimensions d'un temps, puisque le produit ct a les dimensions d'une longueur. Mais nous avons à établir la relation entre les différences Δt de cette variable et la vraie durée relativiste, que nous désignons par d.

Dans l'E. T. toute durée a pour limites deux événements isotopes, c'est-à-dire qui se passent au même point de l'espace. Comme nous ne connaissons les positions dans l'espace que par les coordonnées r, θ et φ, deux événements isotopes sont deux événements pour lesquels ces trois coordonnées sont les mêmes. ds est l'intervalle spatio-temporel qui sépare deux événements quelconques mais très voisins de l'E. T. ; quand il s'agit de deux

(¹) On ajoute parfois à propos de la définition de ces unités qu'il faut que l'atome émetteur soit *en chute libre* : la raison en est que pour être empêché de céder au champ l'atome devrait être soumis à des forces, lesquelles pourraient troubler le phénomène de l'émission, tandis que la chute libre suppose l'absence complète de forces perturbatrices. Mais la chute libre exclut, sauf dans des cas particuliers, l'immobilité par rapport au champ qui, elle, est absolument requise. Heureusement on peut admettre qu'en général les forces extérieures ne modifient pas l'émission d'une façon sensible, ce qui dispense d'exiger la condition de chute libre.

événements isotopes, tous les termes spatiaux du ds^2 sont nuls : on a donc simplement, au signe près :

$$ds^2 = \gamma c^2 dt^2, \quad \text{ou} \quad ds = \sqrt{\gamma} c dt, \quad \text{ou encore} \ \frac{ds}{c} = \sqrt{\gamma} dt.$$

Si les deux événements sont relatifs à une même particule immobile au point considéré la durée qui les sépare est un élément du temps propre, $d\tau = \frac{ds}{c}$, de cette particule ; on a donc :

$$d\tau = \sqrt{\gamma} dt, \quad \text{ou} \quad dt = \frac{d\tau}{\sqrt{\gamma}}.$$

Ainsi dt représente dans tout petit domaine de l'E. T. le quotient par $\sqrt{\gamma}$ du temps propre $d\tau$, qui est aussi la vraie durée relativiste d dans ce petit domaine. Supposons que $d\tau$ soit précisément notre petite unité de temps, étant par exemple une période déterminée d'un certain atome immobile au point considéré ; nous pouvons dire que dt est le quotient par $\sqrt{\gamma}$ de l'unité de temps $d\tau$. Comme γ est plus petit que 1, dt est plus grand que $d\tau$.

Le facteur γ dépend de M et de r ; mais pour une masse M donnée et supposée fixe dans l'espace, et pour une suite d'événements isotopes, γ aura toujours la même valeur ; d'où si d est la durée globale qui sépare les deux événements extrêmes de la suite, de coordonnées t_0 *et* t_1, on aura

$$t_1 - t_0 = \Delta t = \frac{d}{\sqrt{\gamma}}, \quad \text{et} \quad \Delta t > d.$$

Δt est donc le quotient par $\sqrt{\gamma}$ de la durée d qui sépare deux événements même éloignés dans le temps mais qui se passent au même point. Il n'y a du reste pas d'ambiguïté sur le « chemin » à suivre dans l'E. T. de l'événement initial à l'événement terminal, puisque t est la seule variable temporelle du ds^2.

Quand nous avons défini les unités de temps dans un E. T. quelconque nous avons dû les supposer très courtes, parce que d'un instant à un autre, en un même point de l'espace, le champ pouvait changer, si bien qu'une durée globale ne pouvait s'obtenir que par intégration et non par simple addition de durées très petites. Mais, on le voit par ce qui précède, cette condition n'est pas nécessaire dans l'E. T. de Schwarzschild ; en effet le champ de Schwarzschild est *statique* c'est-à-dire indépendant de la coordonnée t et variable seulement d'un point à l'autre de l'espace ;

c'est pour cela qu'une durée globale s'y définit comme la simple somme de durées élémentaires ; dès lors un phénomène périodique aussi long qu'on voudra se produisant en un point donné du champ ou même en des points différents où le champ a même valeur pourra servir d'unité de temps locale ; ce sera le cas en particulier de la période de rotation de la Terre, c'est-à-dire du jour sidéral défini en un point quelconque de la surface terrestre comme l'intervalle de deux passages consécutifs d'une même étoile « au méridien » ; ou, concrètement, comme l'intervalle de deux coïncidences consécutives sur une rétine ou sur une plaque de l'image de l'étoile et de l'image du centre de la lunette marqué par le réticule.

Quand nous avons choisi la variable t, nous l'avons assujettie à une double condition, qui a suffi à la déterminer sans ambiguïté : qu'elle soit purement temporelle, et que la ligne t seule variable coïncide avec la ligne d'Univers de la masse créatrice du champ ; de là est résulté ce fait que t ne figure dans aucun des coefficients du ds^2, ou que par rapport à t le champ est statique.

La double condition imposée ayant suffi à déterminer t il est sûr *a priori* qu'aucune autre variable temporelle n'y pourra satisfaire. On s'en rendrait compte directement en choisissant par exemple d'autres coordonnées d'espace *de même origine* que r, θ et φ ; alors pour conserver la séparation de l'espace et du temps et pouvoir dire que M est encore immobile à l'origine des nouvelles coordonnées spatiales, il faudrait trouver une nouvelle variable t_1, qui soit orthogonale aux trois coordonnées d'espace, sans quoi elle ne serait pas purement temporelle ; or, à supposer qu'on l'ait trouvée, on constaterait que dt_1 n'est pas une différentielle exacte ; ce qui signifie que t_1 ne serait pas définie d'une façon univoque en tout point de l'E. T., et par suite ne saurait jouer le rôle de véritable coordonnée de temps.

C'est ce que l'on exprime en disant que t est le seul temps universel, au cours duquel la masse M de Schwarzschild puisse être dite immobile par rapport aux coordonnées d'espace. Ce privilège de t, qui le distingue de toutes les variables temporelles possibles, entraîne des conséquences. Nous aurons bientôt à signaler l'une d'elles, qui consiste en ce que t joue le rôle d'une variable naturelle dans la propagation radiale de la lumière entre deux points éloignés du champ. Pourtant ce privilège ne va pas jus-

qu'à faire de t un temps physique marqué en tout point du champ par des horloges immobiles : c'est τ, ou d qui, nous l'avons vu, est ce temps physique.

On va se demander, alors, si d n'aurait pas pu être substitué à t comme variable temporelle universelle dans le ds^2 : c'eût été impossible, pour la raison que nous venons de dire ; $d\tau$ n'étant pas une différentielle exacte ne vérifie pas plus que la différentielle dt_1 dont nous avons parlé la condition analytique requise pour que τ, ou d, ait une valeur unique en chaque point.

Ceci du reste se traduit physiquement d'une façon simple : pour réaliser un temps valable dans toute l'étendue d'un champ il ne suffit pas d'avoir des horloges qui, prises isolément, puissent l'indiquer en chaque point de l'espace ; il faut aussi, du point de vue relativiste, pouvoir régler ces horloges optiquement d'une façon cohérente, c'est-à-dire pouvoir attribuer à chacune d'elles l'heure qu'elle indique quand, au lieu de lire directement cette heure on la déduit des indications de plusieurs autres horloges réglées sur elle de proche en proche et formant avec elle un circuit fermé quelconque. Or un tel réglage serait impossible, sauf pour certains circuits privilégiés, avec le temps d.

S'il en est ainsi, il faut dire qu'*il n'existe pas dans un champ de gravitation même statique un temps au sens classique ni même au sens de la relativité restreinte*, c'est-à-dire un temps indiqué par les horloges et pouvant jouer le rôle de coordonnée universelle : d est indiqué localement par les horloges, mais ne peut se définir partout univoquement ; t est une variable partout définie univoquement, mais n'est pas le temps marqué par les horloges naturelles.

Dans ces conditions dater tous les événements dans un champ de gravitation paraît être, théoriquement, une opération difficile, sinon impossible.

Nous dirons bientôt comment on peut la réaliser, dans le champ de Schwarzschild, d'une façon seulement approximative il est vrai, mais suffisante en pratique.

111. Relations entre la variable r de Schwarzschild et la vraie distance radiale relativiste l. — Commençons par le ds^2 extérieur. Nous savons déjà que les coordonnées r, θ et φ ont un sens purement spatial. D'autre part la symétrie du champ dans l'espace

nous permet d'identifier sans plus θ et φ avec les angles que font à partir d'une direction origine des plans passant par le point M, si bien que $\theta = \frac{\pi}{2}$ par exemple sera l'équation d'un « plan » passant par M ; un « plan », c'est-à-dire une variété à deux dimensions, lieu de certaines géodésiques de notre espace non-euclidien (comme un vrai plan est dans l'espace ordinaire le lieu de certaines droites) ; mais un « plan » lui-même non-euclidien, ainsi que nous le verrons bientôt.

Quant à r c'est une variable qui a les dimensions d'une longueur, et qui seule ou combinée avec θ et φ permet de situer par rapport à l'origine tous les points de l'espace.

Ce que nous avons à préciser avant tout ce sont les rapports des différences des coordonnées spatiales de deux points avec la vraie distance qui les sépare selon la théorie et que nous désignons par l. Dans l'E. T. toute distance a pour limites deux événements simultanés, ou mieux les points où se passent deux événements simultanés : quels sens peut avoir ici le mot simultané ? Comme t est la seule variable temporelle qui puisse se définir partout univoquement dans notre E. T., deux événements simultanés seront deux événements de même coordonnée t. Soient d'abord deux événements très voisins de même coordonnée t : leur intervalle spatio-temporel est ds ; mais puisque par hypothèse $dt = 0$ le ds^2 correspondant se réduit à ses termes spatiaux :

$$ds^2 = \frac{dr^2}{\gamma} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2),$$

et il exprime le carré de la vraie distance spatiale des deux points où se passent les deux événements ; autrement dit il est le dl^2 de l'espace où se trouvent ces points.

Mais ce dl^2 se présente à nous comme la somme de deux éléments qui sont l'un, $\frac{dr^2}{\gamma}$, le carré d'une distance élémentaire *radiale*, l'autre, $r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$, le carré d'une distance élémentaire *transversale* ; et ce que nous avons à mettre en évidence c'est la relation entre dr et dl, et la relation entre $r\sqrt{d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2}$ et dl.

Pour avoir la première relation il nous suffit de considérer deux points de mêmes coordonnées θ et φ, c'est-à-dire situés sur un même rayon. Alors nous avons

$$dl^2 = \frac{dr^2}{\gamma}, \quad \text{car} \quad d\theta = d\varphi = 0 \; ; \quad \text{ou} \quad dl = \frac{dr}{\sqrt{\gamma}}.$$

dr est donc, dans chaque petit domaine, le produit par le facteur numérique $\sqrt{\gamma}$ propre à ce domaine de la vraie longueur dl comptée dans le sens radial. Si dl est notre petite unité de longueur nous pouvons dire que dr est le produit par $\sqrt{\gamma}$ de cette unité ; comme $\sqrt{\gamma}$ est plus petit que 1, dr est plus petit que dl.

Pour avoir la seconde relation considérons deux points de même coordonnée r, c'est-à-dire situés sur une même sphère ayant pour centre M. Nous avons alors

$$dl^2 = r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

$$dl = r\sqrt{d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2}\ ;$$

le second membre de cette égalité n'est autre que l'expression en fonction de r, θ et φ d'un arc élémentaire de grand cercle de la sphère de rayon r ; donc, le terme

$$r\sqrt{d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2}$$

représente immédiatement la vraie distance entre deux points très voisins dans le sens transversal : on peut dire que *sur toute sphère de centre* M *la métrique est euclidienne.*

Quant à la vraie distance mesurable l qui sépare les points où se passent deux événements simultanés, c'est-à-dire, toujours, de même coordonnée t, mais éloignés dans l'espace, elle ne peut être définie que par une condition de minimum, car il y a une infinité de chemins qui dans tout espace à plus d'une dimension conduisent d'un point à un autre ; la condition de minimum revient à compter les distances suivant la géodésique qui joint les deux points. Cette distance l peut s'obtenir par mesure directe avec une petite unité ; mais elle ne peut se calculer en fonction de dr, $d\theta$ et $d\varphi$ que par intégration, parce que le facteur $\frac{1}{\gamma}$ qui figure au premier terme du dl^2 étant fonction de r il a en général des valeurs différentes pour les différents éléments dl dont l'intégrale constitue la distance globale.

Dans le champ de Schwarzschild ce sont les distances radiales qui présentent le plus d'intérêt : supposons deux points éloignés situés sur un même rayon issu du point M. Le rayon qui les joint est une géodésique, et leur distance est sans autre condition la somme des distances élémentaires $\frac{dr}{\sqrt{\gamma}}$; si r_0 et r_1 sont les coordonnées

des deux points, leur vraie distance l aura pour expression en fonction de r :

$$l = \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{\gamma}} = \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}}.$$

Comme $\sqrt{\gamma}$ est plus petit que 1 on a $r_1 - r_0 < l$.

Pour le ds^2 intérieur, seules les distances radiales retiendront notre attention : en faisant $dt = 0$ dans ce ds^2 et aussi $d\vartheta = d\varphi = 0$, on obtient la relation suivante entre l'élément de distance radiale dl et la différence de coordonnée dr :

$$dl = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R^3} r^2}};$$

et pour la distance globale l entre deux points situés à l'intérieur de la masse sur un même rayon

$$l = \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R^3} r^2}}.$$

Ici encore, on a

$$dl > dr \quad \text{et} \quad l > r_1 - r_0.$$

Dans toutes nos formules relatives aux distances radiales, figure le facteur constant $\frac{2GM}{c^2}$. Quand on appliquera ces formules au cas où M est la masse du soleil on aura à calculer la valeur de ce facteur constant, qui a les dimensions d'une longueur. Disons tout de suite quelle est cette valeur.

En arrondissant les chiffres, nous pouvons poser
pour la masse du soleil, 2.10^{33} grammes.
pour la constante G, 7.10^{-8} unités C. G. S.
pour le carré de la vitesse de la lumière, 9.10^{20} cm.
d'où

$$2\frac{GM}{c^2} = \frac{2 \times 7\cdot 10^{-8} \times 2\cdot 10^{33}}{9\cdot 10^{20}} = \frac{28\cdot 10^{25}}{9\cdot 10^{20}} \backsim 3\cdot 10^5 \text{ cm} \quad \text{ou} \quad 3 \text{ km}.$$

On appelle parfois « rayon gravitationnel » d'une masse M le

facteur $\frac{GM}{c^2}$; le rayon gravitationnel du soleil est donc d'environ $\frac{3 \text{ km.}}{2} = 1$ km. 5 (¹).

112. Caractère purement théorique des coordonnées de Schwarzschild. — Nous venons de définir les distances et durées relativistes l et d en fonction des variables r et t de Schwarzschild ; nous ne parlons pas de θ ni de φ, qui ne donnent lieu à aucune difficulté d'interprétation.

(¹) Nous avons établi tant pour l'extérieur que pour l'intérieur de la masse M les relations entre Δr et les distances radiales l ; on peut représenter géométriquement ces relations : soient, dans le plan de la figure, O le centre du soleil, et Or un axe sur lequel sont comptées les distances r : (fig. 17).

Sur cet axe r_0 est la valeur critique qui correspond au double du rayon gravitationnel du soleil ; R correspond à la frontière du soleil : r_1 et r_2 sont deux points du vide situés sur un même rayon issu de O.

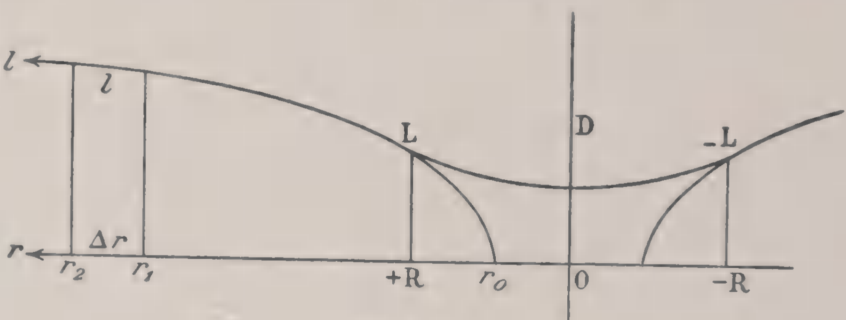

Fig. 17.

La courbe $r_0 l$ est une parabole d'axe or, de sommet r_0 et de paramètre $2r_0 = \frac{4GM}{c^2}$.

Or on démontre que la vraie distance radiale l entre les deux points de coordonnées r_1 et r_2 est l'arc de parabole dont le segment $\overline{r_1 r_2}$ est la projection sur Or.

La figure étant vraie pour toutes les directions autour de O, si l'on considère le plan $\theta = \frac{\pi}{2}$ par exemple, où il n'y a plus d'autre variable d'espace que r et φ, la métrique de ce plan sera la même que celle de la surface engendrée par la révolution de la parabole autour de sa directrice D, qui passe par O.

Quant à l'intérieur du soleil, qui correspond sur l'axe au segment compris entre + R et — R, sa métrique dans le même plan $\theta = \frac{\pi}{2}$ est celle d'une portion de sphère ayant son centre sur la directrice D, et dont la trace sur la figure est un arc de cercle tangent aux deux arcs de parabole en deux points correspondant aux coordonnées $r = +$ R et $r = -$ R (Voir sur cette question : J. Becquerel : *Champ de gravitation d'une sphère matérielle*, p. 19 et p. 28).

Si r et t nous étaient donnés effectivement pour tous les événements de l'E. T. de Schwarzschild nous saurions en déduire les vraies distances et les vraies durées. En fait r et t que nos formules supposent connus ne le sont pas.

On ne saurait d'abord identifier rigoureusement ni nos distances classiques L au centre du soleil avec la coordonnée r, ni nos durées classiques T avec la coordonnée t : en effet l'usage de L et de T comme coordonnées universelles supposerait possible le recours à un système d'inertie de la relativité restreinte ; or le recours à un tel système est impossible dans un E. T. non-galiléen.

Aussi, comme nous ne connaissons pas d'autres positions ni d'autres dates que celles que séparent des origines nos distances et nos durées classiques, faut-il conclure que les variables r et t de Schwarzschild sont purement théoriques.

Pourtant il paraît indispensable de connaître effectivement en tout point de l'espace solaire la coordonnée r, ou du moins quelque grandeur qui soit fonction de r, l par exemple, si l'on veut étudier les phénomènes qui se passent réellement de l'E. T. de Schwarzschild, puisque c'est r qui figure dans le coefficient γ par lequel seul se manifeste le caractère non-galiléen du ds^2.

On pourrait il est vrai se demander si nos grandeurs classiques mesurables L et T, qui diffèrent des variables r et t, ne s'identifient pas avec les grandeurs relativistes l et d ; car il est évident que nos mesures *directes*, supposées correctement faites, nous fournissent nécessairement des résultats conformes à la théorie vraie, qu'elle soit ou non connue de nous ; si donc Einstein a raison, c'est en réalité d que nous fourniraient partout nos mesures directes de temps, et l que nous fourniraient nos mesures directes de distances.

Reste à savoir si les grandeurs L et T obtenues par les procédés classiques sont les résultats de mesures directes ; car il est non moins évident que des mesures *déduites* et non obtenues directement dépendent de raisonnements qui peuvent varier d'une théorie à l'autre.

Pour T la mesure directe est en Astronomie le cas général ; on n'emploie le raisonnement que dans quelques problèmes spéciaux, par exemple quand il s'agit de calculer l'aberration planétaire.

Pour L au contraire la mesure directe est l'exception : seule la base est mesurée directement ; toutes les autres distances sont déduites.

Or toutes les déductions classiques de durées ou de distances font intervenir concurremment avec le postulat d'une métrique euclidienne l'hypothèse d'une propagation rectiligne de la lumière à travers le vide dans tout l'espace. Du point de vue d'Einstein le postulat est inadmissible ; si par surcroît l'hypothèse aussi était inexacte nous aurions une double raison de penser que les durées et distances classiques, non pas quand elles sont mesurées directement, mais quand elles sont calculées, diffèrent des vraies durées et distances relativistes : nous allons voir que cette conclusion s'impose, parce que précisément la lumière ne se propage pas partout en ligne droite dans l'espace autour de la masse de Schwarzschild.

113. Propagation de la lumière dans le vide d'un point à un autre du champ de Schwarzschild. — La loi de propagation d'une action lumineuse dans le vide, d'un point à un autre point très voisin du champ de gravitation, résulte immédiatement de la formule du ds^2. En effet la relation $ds^2 = 0$, qui exprime la loi de propagation de la lumière dans un E. T. galiléen, est valable « en tout point » d'un E. T. non-galiléen quelconque, où tout se passe, nous le savons, comme dans l'E. T. galiléen tangent. On exprime donc aussi bien la loi de propagation de la lumière entre deux points voisins en donnant au ds^2 qu'on dit être égal à 0 la forme non-galiléenne qu'exige avec les coordonnées choisies la structure de l'E. T. que la forme galiléenne possible dans l'E. T. galiléen tangent.

Dans le cas de Schwarzschild à l'extérieur de la matière la loi est donc sous sa forme générale :

$$\frac{dr^2}{\gamma} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - \gamma c^2 dt^2 = 0$$

ou

$$\frac{dr^2}{\gamma} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 = \gamma c^2 dt^2.$$

Plaçons-nous dans un plan passant par le centre de la masse M, le plan $\theta = \frac{\pi}{2}$ par exemple, ce qui donne $d\theta = 0$ et $\sin^2 \theta = 1$; la formule devient

$$\frac{dr^2}{\gamma} + r^2 d\varphi^2 = \gamma c^2 dt^2.$$

Nous pouvons considérer en particulier un petit trajet radial ($d\varphi = 0$), puis un petit trajet transversal ($dr = 0$).

Pour la propagation *radiale* nous avons

$$\frac{dr^2}{\gamma} = \gamma c^2 dt^2, \qquad \text{ou} \qquad \frac{dr^2}{dt^2} = \gamma^2 c^2, \qquad \text{ou enfin} \qquad \frac{dr}{dt} = \gamma c :$$

exprimée en fonction de r et de t la vitesse radiale de la lumière a toujours une valeur inférieure à c ; comme $\gamma = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}$ est d'autant plus inférieur à l'unité que r est plus petit, ladite valeur est de plus en plus petite à mesure qu'on se rapproche de la masse attirante.

Pour la propagation *transversale* nous avons

$$r^2 d\varphi^2 = \gamma c^2 dt^2, \qquad \text{ou} \qquad \frac{r^2 d\varphi^2}{dt^2} = \gamma c^2, \qquad \text{ou enfin} \qquad \frac{r d\varphi}{dt} = \sqrt{\gamma} c :$$

la valeur en fonction de r, φ et t de la vitesse transversale de la lumière est aussi toujours inférieure à c ; de plus étant donnés deux petits trajets transversaux mais qui se font sur deux trajectoires inégalement éloignées de la masse M la vitesse du plus proche a une valeur plus petite, car plus r est petit, plus $\sqrt{\gamma}$ est inférieur à l'unité.

Telles sont les expressions en fonction des variables de Schwarzschild de la loi de propagation de la lumière entre deux points *très voisins* du champ. Pour passer de ces lois différentielles à la loi de propagation entre deux points *éloignés*, un postulat nouveau est indispensable : c'est le principe général de relativité qui va nous le fournir.

Dans un E. T. galiléen les lignes d'Univers de la lumière dans le vide sont des « droites », et des droites d'intervalle nul, c'est-à-dire des droites qui joignent deux événements dont la distance spatiale l et l'intervalle temporel d sont liés par la relation $l^2 - c^2 d^2 = 0$ (nº 29). Or une telle relation est tensorielle, et comme d'après le principe général de relativité les relations tensorielles sont vraies quelle que soit la structure de l'E. T. il suffit de généraliser la notion de droite d'intervalle nul pour connaître la loi de propagation de la lumière dans le vide entre deux événements éloignés — (émission et réception) — d'un E. T. non-galiléen.

C'est la notion de géodésique qui généralise celle de droite :

donc la lumière doit suivre dans un E. T. quelconque des géodésiques d'intervalle nul.

Si maintenant le champ est statique, comme c'est le cas du champ de Schwarzschild, on démontre que *la trajectoire des rayons, dans l'espace, entre deux points déterminés, est telle que la lumière la parcoure dans le « temps » minimum* (1).

Tel est le principe qui permet d'écrire l'équation différentielle de la trajectoire, sous la forme, dans le cas de Schwarzschild, d'une relation entre r, θ, φ, dr, $d\theta$ et $d\varphi$.

Si l'on se place par exemple dans un « plan » $\varphi =$ constante, pour lequel $d\varphi = 0$, l'équation ne contient plus que r et dr, θ et $d\theta$. L'intégration de cette équation donne la forme de la courbe ; nous aurons à revenir sur la question : disons simplement ici que pour un rayon non radial qui passe à proximité de la masse attirante la courbe est à peu près une branche d'hyperbole qui tourne sa concavité vers cette masse et qui est d'autant plus courbe qu'elle passe plus près d'elle. Mais nous savons qu'étant donné le choix des coordonnées de Schwarzschild tout phénomène qui s'exprime en fonction de ces coordonnées par une différence d'angle au centre, — et c'est le cas pour le changement de direction des éléments successifs de notre courbe — se présente de la même façon dans notre système de référence usuel, le système d'inertie stellaire. Donc les rayons qui nous arrivent des étoiles ou des planètes ne sont pas rigoureusement rectilignes, et, pour en revenir aux résultats de nos calculs classiques de durées et de distances, nous devons conclure de ce qui précède que, en toute rigueur, ces résultats sont incorrects du point de vue d'Einstein, puisqu'ils présupposent à tort une propagation partout rectiligne de la lumière dans le vide, et un espace à métrique partout euclidienne.

En conséquence nous n'avons pas plus le droit d'identifier dans tous les cas nos grandeurs classiques L et T avec les grandeurs relativistes l et d qu'avec les différences des coordonnées r et t. Une seule ressource nous reste : c'est de montrer, si possible, que les différences dont nous venons d'établir la réalité entre L, l et r, et entre T, d et t, sont pratiquement négligeables. S'il en

(1) Jean Chazy : *La théorie de la relativité et la mécanique céleste*, 2 vol., Paris, 1928-1930, t. I, ch. VI, p. 233 et suiv.

était ainsi en particulier pour les longueurs, nous serions en droit de substituer à r dans le facteur γ la seule distance radiale qui nous soit connue, c'est-à-dire la distance classique au centre du Soleil, L ; nous pourrions connaître ainsi γ d'une façon approchée mais suffisante, et déduire enfin du ds^2 de Schwarzschild les conséquences observables qu'il comporte. Voyons ce qu'il en est.

114. Egalité approchée des distances classique et relativiste L **et** l, **et substitution de** L **à** r **dans le facteur** γ. — Nous commençons par les distances puisque c'est la coordonnée r qui figure dans γ. La seule distance radiale qui nous soit connue est la distance classique L. Si nous pouvions établir directement l'égalité approchée de L et de r le problème serait résolu.

Mais nous n'avons aucun moyen de comparer directement L qui est une distance mesurée avec r qui n'est qu'une coordonnée sans signification physique immédiate. Au contraire nous pouvons comparer L avec l qui est aussi une distance mesurable. De fait nous allons montrer d'abord par l'examen même de nos procédés de mesure que L est peu différent de l ; ensuite nous verrons comment grâce d'une part à cette égalité approchée de L et de l et grâce d'autre part à la relation qui lie l à r on peut sans erreur sensible substituer L à r dans le calcul de γ.

La différence entre L et l peut provenir de deux sources : de quelque incorrection de nos mesures directes en ce qui concerne la longueur de base, et, pour les distances déduites, des raisonnements impliqués dans nos calculs. Pour la longueur de base on pourrait se demander d'abord si nos unités pratiques de longueur sont assez petites pour nous fournir des résultats exacts, étant donné que dans un espace non-euclidien l'unité doit toujours pouvoir être considérée comme placée dans l'espace euclidien tangent ; et l'on serait déjà en droit de regarder comme vraisemblable qu'en tout état de cause le mètre ou même le décamètre ne sont pas, quand il s'agit de mesurer une longueur de base de l'ordre du kilomètre, des unités trop grandes. Mais ce qui enlève tout doute à ce sujet c'est le fait que notre longueur de base fondamentale pour le calcul des distances astronomiques s'étend entre deux points de la *surface* terrestre. Or si un champ de gravitation peut influencer sa mesure c'est à peu près exclu-

sivement le champ créé par la Terre elle-même, tel qu'il est à sa surface ; en effet dans cette région le champ du Soleil et celui de la Lune sont négligeables par rapport au champ terrestre ; négligeables d'après la théorie de Newton, et par conséquent aussi, en raison de l'accord approché des deux théories, d'après la théorie nouvelle. Mais la Terre étant à peu près sphérique, son champ a les mêmes propriétés que le champ de Schwarzschild ; en particulier sur une surface concentrique à la Terre règne la métrique euclidienne, ce qui se manifeste dans l'expression de l'élément d'arc de grand cercle, où ne figure pas le facteur γ :

$$dl^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

Par conséquent une unité de longueur quelconque employée pour mesurer la distance de deux points de la surface du globe fournit du point de vue d'Einstein une mesure exacte, c'est-à-dire donne la vraie distance relativiste l.

Reste la question des calculs trigonométriques et des mesures d'angles qu'ils font intervenir. Ces mesures impliquent des visées à distance d'objets terrestres ou d'astres et présupposent la propagation rectiligne de la lumière dans le vide, ainsi que la validité d'une trigonométrie euclidienne.

La prépondérance du champ terrestre à la surface de la Terre et sa symétrie par rapport au centre du globe, excluent toute cause d'erreur, de ce chef, dans les opérations purement géodésiques : en effet à la surface même de la Terre aucune déviation de la lumière n'est possible dans le sens transversal, et par ailleurs l'application des principes de la trigonométrie classique est légitime : nous voilà donc rassurés en ce qui concerne nos mesures d'arcs de méridien.

Mais pour passer de l'arc de méridien au rayon de la Terre, du rayon de la Terre à la distance du Soleil, de cette distance aux distances des planètes au Soleil, nous raisonnons d'après des visées d'astres, c'est-à-dire comme si la lumière se propageait toujours en ligne droite dans les espaces célestes. Ici nous avons tort, en théorie, puisque les rayons qui passent dans le vide à proximité du Soleil sont incurvés : de plus nous supposons indûment que nous pouvons appliquer les principes euclidiens.

Cependant il faut croire que l'erreur est minime : si en effet elle était sensible elle aurait introduit depuis longtemps dans

nos observations des anomalies systématiques appréciables; en fait les Astronomes n'ont jamais eu à tenir compte d'anomalies de ce genre ; donc les différences qu'introduirait dans nos distances astronomiques la substitution de calculs fondés sur le caractère non galiléen de l'E. T. à nos calculs classiques sont au plus de l'ordre de nos erreurs de mesure.

Ajoutons que cette conclusion vaut pour nos mesures du diamètre apparent du Soleil, c'est-à-dire pour nos évaluations des distances radiales à l'intérieur de l'astre (1).

Bref, nous pouvons regarder dans tous les cas nos distances classiques L comme sensiblement égales aux distances relativistes l ; et ceci est vrai en particulier des distances radiales, qui sont orientées dans l'espace comme les différences Δr de la coordonnée r de Schwarzschild.

Il s'agit maintenant de mettre à profit cette égalité approchée de L et de l pour nous faire avant tout une idée de la variable r, qui figure dans le facteur γ du ds^2 extérieur. Nous avons établi deux relations qui nous donnent l en fonction de r, que nous ne connaissons pas, et dont la relation avec L nous est inconnue aussi ; si au lieu de cela nous savions exprimer r en fonction de l, sachant que l est approximativement égal à L nous pourrions connaître r à la même approximation : or ceci est possible évidemment. Sans expliciter les calculs nous pouvons indiquer les résultats :

Commençons par l'intérieur du Soleil : d'après la seconde formule de Schwarzschild nous avons, en appelant l_1 le rayon relativiste du Soleil et r_1 la valeur correspondante de la coordonnée radiale r,

$$l_1 = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2R^3} r^2}} \; ;$$

où R représente le quotient par 2π d'une circonférence de grand cercle de la surface du Soleil, c'est-à-dire à très peu près le rayon

(1) Il est vrai — nous le verrons — que la déviation des rayons dans le voisinage du Soleil nous fait voir les sources plus éloignées du centre de l'astre qu'elles ne le sont en réalité ; mais nous verrons aussi que quand il s'agit de points lumineux appartenant au bord du Soleil le déplacement, évalué d'après les résultats de la présente discussion, est négligeable relativement à nos erreurs de mesure.

classique de l'astre. Appelons $\varphi(l)$ l'expression de r en fonction de l qui résulterait de l'inversion de la relation précédente ; nous pouvons écrire $r = \varphi(l)$; et dans cette nouvelle relation où c'est l qui joue le rôle de variable connue nous pouvons donner à cette variable, en première approximation, les valeurs classiques L, puisque L vaut l à très peu près dans tous les cas. Or si l'on calcule de cette façon la valeur de r qui correspond au rayon classique du Soleil R, c'est-à-dire à $l_1 \sim R = 697.000$ kilomètres, on trouve que la différence entre l_1 et r_1 n'atteint pas $l_1.10^{-6}$, ni par suite $R.10^{-6}$, n'étant que de 500 mètres environ sur 697.000 kilomètres [1].

Mais une telle différence est nettement inférieure à nos erreurs d'évaluation du diamètre apparent du Soleil ; par conséquent nous serions sûrs de ne pas commettre une erreur plus grande que nos erreurs de mesure en substituant à r_1 la distance relativiste l_1 si nous la connaissions ; d'autre part nous savons que la différence entre R et l_1 est elle-même au plus de l'ordre de nos erreurs de mesure ; donc nous pouvons sans risquer d'aggraver ces erreurs substituer R à r_1 dans nos calculs ; et ceci va nous permettre d'utiliser l'autre formule de Schwarzschild pour l'évaluation des distances radiales à l'extérieur du Soleil.

Ici nous avons, en faisant égale à R, conformément à ce qui précède, la valeur de r qui correspond au rayon du Soleil, et en appelant l les distances radiales à partir du bord de l'astre,

$$l = \int_R^r \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}}.$$

De cette formule nous pouvons encore tirer l'expression de r en fonction de l, $r = \psi(l)$; enfin raisonnant comme tout à l'heure nous pouvons, pour calculer à très peu près l'écart entre l et r substituer à l dans la relation $r = \psi(l)$ les distances classiques L comptées à partir du bord du Soleil. Or si nous calculons r de cette façon en donnant à L les valeurs, connues cette fois, qui correspondent aux distances moyennes à partir du bord du Soleil de Mercure et de la Terre, deux cas particulièrement intéressants pour nous, nous trouverons que les différences entre r et l sont

(1) Jean Becquerel : *Champ de gravitation d'une sphère matérielle*, p. 28.

toujours très petites, à savoir de l'ordre de $l.10^{-8}$, ou $L.10^{-8}$. Mais ces différences aussi sont inférieures à nos erreurs de mesure en matière de distances astronomiques ; c'est ainsi que la distance de la Terre au Soleil n'est connue de nous, comme la parallaxe elle-même, qu'à un deux-millième près. Nous pourrions donc sans aggraver ces erreurs identifier simplement r et l si nous connaissions l exactement ; mais nous pouvons aussi, étant donné que l'écart entre l et L est lui-même plus petit que nos erreurs de mesure, substituer L à r dans la formule extérieure de Schwarzschild. Enfin, la quasi-égalité des distances radiales classiques et des différences des coordonnées r selon les deux formules nous autorise à raisonner comme si la formule extérieure était valable à partir du centre du Soleil. Tout compte fait tant pour le bord même de l'astre que pour un point plus éloigné, nous sommes sûrs, en substituant à la coordonnée r du ds^2 extérieur la distance classique au centre du Soleil de pouvoir calculer γ avec une approximation suffisante.

Voyons quelles sont les valeurs de γ, c'est-à-dire de $1 - \frac{2GM}{c^2L}$, qui nous intéressent : nous savons que, quand M représente la masse du Soleil, $\frac{2GM}{c^2}$ a pour valeur 3 kilomètres. Pour obtenir la valeur de γ correspondant à telle distance L du centre du Soleil, nous n'avons qu'à diviser 3 kilomètres par L et à retrancher le résultat de l'unité ; on voit tout de suite que $\frac{2GM}{c^2L}$ sera toujours extrêmement petit et γ toujours très voisin de 1.

Le rayon du Soleil étant égal en chiffres ronds à 7.10^5 km., nous avons déjà pour le bord de l'astre $\frac{2GM}{c^2L} = \frac{3 \text{ km}}{7 \cdot 10^5}$; d'où

$$\gamma_S = 1 - 4{,}3.10^{-6}, \qquad \text{et} \qquad \sqrt{\gamma_S} \backsim 1 - 2{,}15.10^{-6}. \text{ (1)}$$

A la distance moyenne de Mercure, environ 6.10^7 km.

$$\gamma_M = 1 - \frac{3}{6.10^7} \qquad \text{ou} \qquad 1 - 5.10^{-8}, \qquad \text{et} \qquad \sqrt{\gamma_M} \backsim 1 - 2{,}5.10^{-8}.$$

---

(1) Quand une quantité γ est égale à l'unité plus ou moins une fraction très petite de l'unité, α, c'est-à-dire quand $\gamma = 1 \pm \alpha$, on a, à un terme en α^2 près, $\sqrt{\gamma} = 1 \pm \frac{\alpha}{2}$. En effet :

$$\left(1 \pm \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 \pm \frac{2\alpha}{2} + \frac{\alpha^2}{4} \sim 1 \pm \alpha.$$

A la distance moyenne de la Terre, environ $1{,}5.10^8$ km.

$$\gamma_T = 1 - \frac{3}{1{,}5.10^8} \qquad \text{ou} \qquad 1 - 2.10^{-8}, \qquad \text{et} \qquad \sqrt{\gamma_T} \backsim 1 - 10^{-8}.$$

115. Egalité approchée du temps classique T, de la durée relativiste d et des différences Δt de la coordonnée temporelle de Schwarzschild. — Connaissant γ nous pouvons dire d'abord que dans la région extérieure au Soleil où γ diffère très peu de l'unité, $d = \sqrt{\gamma}\,(t_1 - t_0)$ est toujours très proche de la différence de coordonnées Δt.

Nous savons de plus qu'en tout point du champ de Schwarzschild, qui est statique, une horloge immobile, même à longue période, marque bien la durée relativiste locale d, et que c'est encore le cas pour l'horloge constituée par la Terre en rotation, son mouvement orbital la laissant toujours dans des régions où le champ solaire a à peu près la même valeur. Mais du point de vue d'Einstein cette durée d ne peut servir de variable temporelle universelle, alors que dans nos procédés classiques d'observation nous considérons le jour sidéral comme une fraction d'un temps universel T valable dans tout le système d'inertie stellaire. S'il s'agissait d'une horloge immobile par rapport à ce système et située très loin du Soleil et de toute autre masse, elle marquerait un temps d qui ne différerait pas de T, car alors on aurait $\gamma = 1$ et $d = t_1 - t_0$; l'erreur que nous commettrions en faisant jouer à notre temps terrestre le rôle de la coordonnée t viendrait donc uniquement de la différence entre $\sqrt{\gamma}$ et 1, différence qui pour la Terre est de l'ordre de 10^{-8}. La substitution de T à t dans les calculs sera permise à cette approximation. Nous n'aurons du reste, quant à nous, à tenir compte d'aucune différence de ce chef, parce que nous n'aurons affaire qu'à des problèmes — calcul de la trajectoire d'un point matériel ou de celle d'un rayon lumineux dans le champ du Soleil — où le temps s'élimine.

Par contre nous allons voir que la différence entre la durée physique d et la variation Δt de la coordonnée de Schwarzschild doit être prise en considération, étant dans certains cas accessible à l'expérience.

116. Déplacement vers le rouge des raies spectrales d'origine solaire. — Maintenant que nous connaissons d'une manière suffisamment exacte le facteur γ du ds^2 de Schwarzschild nous sommes en mesure de tirer de la théorie d'Einstein quelques-unes des conséquences qu'elle entraîne, tout au moins dans l'E. T. solaire. Trois sortes de conséquences vont retenir notre attention, qui paraissent bien avoir subi avec succès l'épreuve du contrôle expérimental ; d'abord le déplacement vers le rouge des raies spectrales d'origine solaire ; ensuite la déviation des rayons lumineux qui nous viennent des étoiles en passant près du Soleil ; enfin le mouvement de la planète Mercure.

Le déplacement vers le rouge des raies solaires est un corollaire du rôle privilégié de la coordonnée t de Schwarzschild et de sa relation avec la vraie durée d.

Considérons deux périodes lumineuses définies de la même manière — atomes émetteurs de même espèce, même saut électronique, et mêmes conditions physiques de l'émission — en deux endroits du champ extérieur de Schwarzschild ; pour préciser, en un point de la surface du Soleil et en un point de la surface terrestre.

Nous savons que ces deux périodes en tant qu'éléments des vrais temps locaux d, ou τ, sont égales, comme elles l'étaient pour les classiques, c'est-à-dire que si l'on pouvait les comparer directement on les trouverait égales.

Cette comparaison *directe* des durées de deux phénomènes qui se passent en deux points éloignés ne nous est pas possible ; mais nous pouvons, au moyen du spectroscope, comparer la place qu'occupe, relativement à un spectre d'origine terrestre, une raie déterminée d'origine solaire à la place qu'occupe la raie terrestre de même nom. Comme la répartition des raies dans un spectre dépend de la période que présentent à leur arrivée dans l'appareil dispersif les vibrations correspondantes, on peut ou bien déduire cette période de la place occupée par les raies, ou inversement prévoir leur place d'après la période supposée connue : c'est de cette façon déjà que les classiques pouvaient conclure par exemple du déplacement par rapport à telle raie terrestre d'une raie de même nom émise en un point d'un des bords équatoriaux du Soleil que la période à l'arrivée de cette raie solaire était plus grande, ou plus petite, que la période terrestre

correspondante, ce qui manifestait, selon la théorie de l'effet Doppler, une vitesse d'éloignement, ou de rapprochement, de la source, due à la rotation du Soleil [1] ; ou qu'ils pouvaient inversement prévoir ledit déplacement d'après la vitesse de rotation du Soleil connue par ailleurs.

Supposons que nous ayons affaire à une raie issue du centre du disque solaire, et reçue sur Terre à midi, afin d'écarter toute complication due à une vitesse relative radiale de la source et du spectroscope. D'après la théorie classique, la raie solaire occupera dans le spectre terrestre la même place que la raie terrestre homologue. Pourquoi ? — 1° parce que la période d'émission sur le Soleil est égale à la période d'émission sur la Terre ; 2° que ces deux durées sont deux fractions d'un même temps T, qui sert aussi à mesurer la durée de transmission des actions lumineuses du Soleil à la Terre ; 3° que le temps de transmission, θ, du phénomène qui marque le début de la période solaire étant le même, à cause du repos relatif de la source et du récepteur, que le temps de transmission du phénomène qui en marque la fin, la période de réception de la radiation solaire est égale à sa période d'émission, et par suite à la période terrestre [2].

Du point de vue d'Einstein au contraire, il n'y a plus un temps universel dont fassent partie au même titre les périodes au départ et à l'arrivée et le temps de transmission : en effet les périodes, en tant que durées de phénomènes se passant ici ou là, sont des éléments du temps local d, ou, si l'on se réfère dans chaque cas à l'atome émetteur, de son temps propre τ ; mais ce temps d, qui ne peut figurer dans le ds^2 sous la forme d'une différentielle exacte, ne saurait jouer le rôle de temps universel, ni par suite mesurer le temps de transmission, car qui dit transmission dit couple de phénomènes se passant à distance dans le champ.

Y aurait-il donc en dehors de d, dans l'E. T. de Schwarzschild, une variable qui puisse servir à mesurer ce temps de transmission ?

---

(1) En réalité les raies du spectre solaire sont des raies noires d'absorption ; mais la place de ces raies dans le spectre étant la même que celle des raies d'émission nous ne parlerons que de celles-ci.

(2) Pour celle-ci il faudrait aussi, en droit, distinguer période d'émission et période de réception ; mais comme la source est dans le spectroscope même, la transmission n'intervient pas et la distinction serait purement théorique.

— Oui, et même à la mesurer directement ; c'est la variable t elle-même. On pourrait s'étonner qu'une coordonnée temporelle qui en soi pourrait être quelconque exprime ainsi immédiatement la durée d'un phénomène physique objectif : mais c'est qu'il s'agit du phénomène fondamental de la propagation de la lumière, et d'une coordonnée qui, nous le savons, jouit déjà de ce privilège d'être la seule coordonnée temporelle qu'on puisse définir partout d'une façon univoque.

Au surplus voyons comment dans notre problème vont s'exprimer en fonction de t les durées de transmission, du Soleil à la Terre, du phénomène initial et du phénomène terminal de la période solaire. Il nous faut tout exprimer en t, le temps de transmission et les périodes elles-mêmes, d'émission et de réception. Soit $d\tau$ la période d'émission : exprimée en fonction du temps local d, elle a sur le Soleil et sur la Terre la même valeur. Appelons dt_s la période d'émission exprimée en fonction de t sur le Soleil : nous avons $dt_s = \frac{d\tau}{\sqrt{\gamma_s}}$, γ_s ayant la valeur qui correspond au bord du Soleil.

Appelons dt_0 la période d'émission exprimée aussi en fonction de t, mais sur la Terre ; nous avons $dt_0 = \frac{d\tau}{\sqrt{\gamma_T}}$; cependant comme ici la différence entre γ et l'unité est petite par rapport à ce qu'elle était dans la précédente formule, nous pouvons pour simplifier la négliger et écrire $dt_0 = d\tau$.

Comme $\sqrt{\gamma_s}$ est plus petit que 1, nous avons $dt_s > dt_0$: *exprimée en fonction de t sur le Soleil la période d'émission $d\tau$ est plus grande que la même période exprimée en fonction de t sur la Terre.*

Cela posé nous allons montrer que, en fonction de t toujours, la période de *réception* sur la Terre d'une radiation émise sur le Soleil avec une période d'émission dt_s est égale elle aussi à dt_s. Pour établir cette égalité il nous faut calculer en fonction de t les durées de transmission des deux phénomènes qui marquent respectivement le début et la fin de la période d'émission. Soient r_s et r_0 les valeurs de r qui correspondent au point d'émission, sur le Soleil, et au point de réception, sur la Terre ; il s'agit d'une transmission de r_s à r_0, transmission radiale, dont la loi différentielle, avons-nous dit, est $\frac{dr}{dt} = \gamma c$ (nº 113) ; d'où pour le

temps de transmission élémentaire,

$$dt = \frac{dr}{\gamma c} = \frac{dr}{c\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)}.$$

Appelons t_1 la date de réception sur Terre du phénomène initial : nous avons

$$t_1 = \int_{r_s}^{r_0} \frac{dr}{c\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} + h_1,$$

l'intégrale représentant le temps de transmission, et h_1 étant une constante qui n'est autre que la date d'émission en fonction de t dudit phénomène initial ; c'est-à-dire $h_1 = 0$ si cette date est l'origine des temps. Si t_2 est la date de réception sur Terre du phénomène terminal nous pouvons écrire encore, puisque les points d'émission et de réception sont les mêmes que dans le premier cas,

$$t_2 = \int_{r_s}^{r_0} \frac{dr}{c\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} + h_2,$$

h_2 étant une autre constante qui est cette fois la date d'émission en fonction de t du phénomène terminal, c'est-à-dire la période même d'émission exprimée en fonction de t sur le Soleil :

$$dt_s = \frac{d\tau}{\sqrt{\gamma_s}}.$$

Quant à la période de réception elle est égale à la différence des deux dates de réception, c'est-à-dire à

$$h_2 = dt_s = \frac{d\tau}{\sqrt{\gamma_s}},$$

puisque les deux intégrales sont identiques ; d'où, en fonction de t, la période de réception sur Terre est égale à dt_s, c'est-à-dire à la période d'émission sur le Soleil.

Revenons maintenant à la comparaison de cette période de réception dt_s et de la période terrestre homologue dt_0 : nous avons

$$dt_s = \frac{d\tau}{\sqrt{\gamma_s}},$$

ou, comme $dt_0 = d\tau$,

$$dt_s = \frac{dt_0}{\sqrt{\gamma_s}}, \qquad \text{et} \qquad dt_s > dt_0,$$

puisque $\sqrt{\gamma_s}$ est plus petit que 1.

Ce sont ici deux durées exprimées en fonction de la variable t, mais *au même point* r, et qui sont inégales ; donc exprimées en fonction de la vraie durée d — ce qui supposera qu'on les multiplie l'une et l'autre par le même facteur $\sqrt{\gamma}$, que pour simplifier nous avons fait égal à 1 — elles présenteront encore une différence de même sens : *en fonction du vrai temps terrestre d la période de réception sur la Terre d'une radiation donnée d'origine solaire est plus grande que les périodes d'émission et de réception d'une radiation terrestre de même nom* ; plus grande dans le rapport de $\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ à l'unité, si l'on donne à γ la valeur qui correspond au bord du Soleil. En conséquence, dans un spectroscope terrestre, où les phénomènes rythment évidemment le temps terrestre d, une raie d'origine solaire sera déplacée vers le rouge par rapport à la raie terrestre homologue.

On se rappelle qu'Einstein dans sa première théorie fondée sur le seul principe d'équivalence avait annoncé déjà un déplacement de ce genre. Il y a pourtant entre les deux théories une différence essentielle : dans la théorie que nous venons d'exposer le déplacement tient au rapport, variable suivant la distance au centre du Soleil, entre la coordonnée t et le temps local d, et nullement à une différence entre les périodes d'émission elles-mêmes, qui exprimées ici et là en fonction de d sont égales. C'est là une simple conséquence du caractère non-galiléen de l'E. T. de Schwarzschild ; de fait si l'E. T. était partout galiléen, et γ partout égal à 1, dt serait partout égal à $d\tau$ et aucun déplacement n'aurait lieu. Dans la première théorie au contraire le déplacement, exigé par le principe d'équivalence, ne pouvait guère s'expliquer que par une différence réelle entre les périodes d'émission ; en effet les temps de transmission du phénomène initial et du phénomène terminal étant égaux et l'E. T. étant galiléen aucune autre explication simple n'était possible.

La thèse du déplacement est admise par tous les physiciens relativistes ; mais la façon dont elle est exprimée varie beaucoup d'un auteur à l'autre, même si l'on s'en tient aux plus qua-

lifiés. Les uns parlent d'une influence du champ sur le rythme des phénomènes ; les autres nient une telle influence. C'est que l'on peut penser en parlant de « périodes » soit aux périodes d'émission considérées chacune comme élément du temps local d et comparées par la pensée, auquel cas elles sont indépendantes du champ et partout égales ; soit à ces mêmes périodes d'émission exprimées en fonction de la variable t, et comparées encore par la pensée, auquel cas elles ont des valeurs dépendantes du champ et inégales, parce que fonction de γ qui lui-même dépend de la position dans le champ ; soit enfin à une période d'émission sur la Terre et à la période de réception sur la Terre d'une radiation pareille d'origine solaire, toutes deux considérées comme éléments du vrai temps terrestre d, comparables effectivement cette fois au spectroscope, et là réellement inégales.

Il ne nous reste plus qu'à nous faire une idée de l'importance du déplacement. Nous savons qu'à la surface du Soleil γ_s vaut $1 - 4.10^{-6}$ environ, et $\sqrt{\gamma_s}$, $1 - 2.10^{-6}$.

A la distance moyenne de la Terre au Soleil, γ_T vaut $1 - 2.10^{-8}$ et $\sqrt{\gamma_T}$, $1 - 10^{-8}$; c'est cette dernière différence que nous avons négligée en faisant pour la Terre $\gamma = 1$.

Nous avons donc, conformément aux notations que nous avons admises :

$$dt_s = \frac{dt_0}{\sqrt{\gamma_s}} = \frac{dt_0}{1 - 2\cdot 10^{-6}}, \quad \text{ou approximativement} \quad dt_s = dt_0(1 + 2\cdot 10^{-6}).$$

Le rapport des deux longueurs d'onde sera évidemment le même puisque les longueurs d'onde sont les produits des périodes par la vitesse de la lumière dans l'appareil dispersif, c_n.

Supposons qu'il s'agisse d'une radiation de $0^{\mu},5$, ou de 5.000 Angströms ; nous aurons

$$c_n dt_0 = 5000^{A}, \qquad \text{et} \qquad c_n dt_s = 5000^{A}(1 + 2\cdot 10^{-6})\ ;$$

et le déplacement, $c_n\,(dt_s - dt_0)$, sera de $5000^{A} \times 2.10^{-6}$; c'est-à-dire de 10^{-2}A, ou $0^{A},01$.

On voit que ce déplacement est proportionnel à la longueur d'onde et égal d'après nos calculs au produit de cette longueur d'onde par 2.10^{-6}. Un calcul plus exact donne $2{,}1.10^{-6}$, ce qui équivaut à un effet Doppler ordinaire dû à une vitesse d'éloignement de 635 mètres par seconde.

Un tel déplacement est en principe accessible aux observations, car on peut situer les raies fines dans un spectre avec une précision de $0^{A},001$.

Depuis longtemps on avait observé un léger déplacement vers le rouge des raies d'absorption du spectre solaire, et plusieurs explications physiques du phénomène avaient été proposées : de fait il faut s'attendre à ce que, indépendamment de la gravitation, de multiples influences physiques contribuent à déterminer les périodes d'émission ou de réception, en particulier les mouvements des atomes émetteurs ou absorbants et la pression des gaz dans les couches émettrices. Comme on sait que plusieurs de ces influences s'exercent certainement l'effet Einstein s'il existe ne saurait être constaté qu'après correction des déplacements déjà expliqués.

Nous ne pouvons insister sur les résultats des observations ni sur leur discussion (1) ; disons seulement que si l'effet Einstein peut être invoqué concurremment avec d'autres causes pour expliquer les déplacements des raies *solaires*, ces déplacements ne peuvent être considérés actuellement comme une preuve positive de la théorie.

Si du Soleil on passe à certaines *étoiles de très grande densité*, les conclusions sont plus favorables. On conçoit qu'à la surface d'une étoile de masse à peu près égale à celle du Soleil, mais de rayon beaucoup plus petit, le champ sera bien plus intense qu'à la surface du Soleil : c'est le cas pour le Compagnon de Sirius, du moins d'après des déductions vraisemblables fondées sur l'astrophysique moderne. L'effet Einstein pour des raies issues de cet astre extraordinairement dense serait une trentaine de fois plus grand que pour les raies solaires ; il équivaudrait à l'effet d'une vitesse d'éloignement de 19 ou 20 kilomètres par seconde. Or on est en droit aujourd'hui d'affirmer que les raies issues du Compagnon de Sirius présentent bien un déplacement vers le rouge de cet ordre de grandeur, comme l'ont établi depuis 1925 les astrophysiciens du Mont Wilson.

C'est surtout, ou même exclusivement, sur ce résultat qu'il

---

(1) Sur toute cette question : voir F. Croze : *Les Preuves expérimentales de la Relativité*, 1 brochure, Paris, 1927, p. 22-39. Et G. Darmois : *La théorie einsteinienne de la gravitation : les vérifications expérimentales*. 1 brochure, Paris, 1932, p. 25-29.

convient de s'appuyer jusqu'à nouvel ordre pour affirmer que la théorie d'Einstein sur le déplacement des raies a été vérifiée expérimentalement.

117. Déviation des rayons lumineux qui passent près du Soleil. — Nous savons que la trajectoire d'un rayon lumineux non radial qui passe à proximité de la masse attirante du champ de Schwarzschild est une sorte d'hyperbole dont la concavité est tournée vers la masse (nº 113) ; et qu'un rayon qui nous arrive d'une étoile en frôlant le Soleil a pour trajectoire par rapport au système d'inertie stellaire une courbe de ce genre. Nous allons rechercher maintenant comment la courbure d'une telle trajectoire peut se manifester dans nos observations. La courbe (fig. 18) a deux asymptotes qui font entre elles un angle obtus ; la différence Δ entre cet angle et π s'exprime en fonction de la masse M du Soleil et de la distance minima r de la courbe au centre de l'astre par la relation :

$$\Delta^{\text{radians}} = \frac{4GM}{c^2 r}. \quad (^1)$$

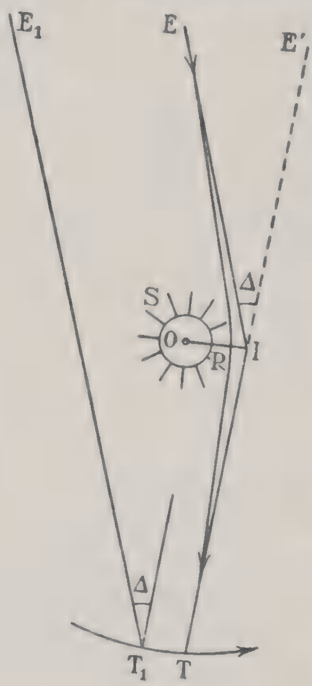

Fig. 18.

Soient donc, dans le plan de la figure, E, une étoile, S le Soleil, T la Terre, EI et IT les deux asymptotes de la courbe, OP $= r$, la distance au centre du Soleil du point de la courbe le plus proche de l'astre, point qu'on peut appeler le périhélie P de la courbe. Les rayons issus de l'étoile nous arrivent suivant la tangente en T à la courbe, qui, on le démontre, se confond à très peu près avec l'asymptote IT ; *a fortiori*, à cause du grand éloignement de l'étoile ils partent selon l'asymptote EI ; et comme nous situons toujours les sources dans le prolongement de la direction d'arrivée des rayons, nous voyons l'étoile en E'. Si le champ du Soleil n'était pas interposé entre l'étoile et la Terre — ce qui arrive à une autre

[1] Jean Becquerel : *Le Principe de Relativité et la théorie de la Gravitation*, ch. XIV, p. 234-240.

époque de l'année où S est assez loin de la droite T_1E_1 — quelques degrés suffisent —, nous verrions l'étoile dans la direction T_1E_1, qui est parallèle à EI dans le cas ordinaire d'une étoile sans parallaxe ; et les mêmes conclusions s'appliquent aux emplacements apparents des étoiles sur une photographie du ciel.

Donc la présence du Soleil produit un déplacement angulaire de l'étoile dans le sens d'un éloignement par rapport au Soleil et égal à Δ radians.

La valeur de Δ est aisée à déduire : calculons-la approximativement dans le cas où le rayon lumineux frôle le bord du Soleil, c'est-à-dire où r est égal au rayon de l'astre, soit environ 7.10^5 kilomètres. Nous pouvons décomposer $\Delta = \frac{4GM}{c^2r}$ en deux facteurs, $\frac{2GM}{c^2}$, que nous savons égal à 3 kilomètres, et $\frac{2}{r}$, ou ici $\frac{2}{7 \cdot 10^5}$: cela nous donne en radians $\Delta = \frac{2 \times 3}{7 \cdot 10^5}$, ou un peu moins de 10^{-5} radians.

En secondes d'arc, $\Delta = \frac{648.000'' \times 10^{-5}}{3{,}14} \sim 2''$, puisque 180°, qui équivalent à π radians, valent 648.000″.

Le calcul exact donne 1″,74.

Quand on observe des étoiles plus éloignées, en direction, du Soleil, la déviation est inversement proportionnelle à la distance radiale r, donc aussi à la distance angulaire. A une distance de quelques degrés la déviation tombe au-dessous des possibilités d'observation (1).

On ne peut pas dans les conditions ordinaires observer les étoiles proches, en direction du Soleil, à cause de la diffusion de la lumière solaire dans l'atmosphère ; mais on le peut en cas d'éclipse totale de Soleil.

Supposons qu'on ait photographié la région du ciel où apparaîtra le Soleil pendant l'éclipse à une époque où les rayons qui nous en arrivent passaient assez loin du Soleil pour que la déviation soit insensible : chaque étoile apparaîtra sur la photographie dans sa position vraie, E. Si au moment de l'éclipse on rephotographie la même région, chaque étoile se montrera dans sa position déviée E′. Les étoiles les plus éloignées du Soleil

(1) Rappelons qu'Einstein avait déduit déjà une déviation du même sens, mais moitié moindre, de sa première théorie (n° 77). Le changement de grandeur de la déviation provient de ce que l'espace, qui dans cette première théorie était euclidien, est non-euclidien dans la théorie de la gravitation.

occuperont sur la seconde photographie les mêmes places à très peu près que sur la première ; mais les plus proches occuperont des positions nouvelles d'autant plus écartées de leurs positions premières que leurs rayons passeront plus près de l'astre.

C'est ici une conséquence expérimentale de la théorie d'Einstein dont les observations antérieures n'avaient pas établi l'existence de fait [1]. On voulut profiter, le 29 mai 1919, d'une éclipse totale de Soleil pour soumettre sur ce point la théorie au contrôle de l'expérience. Des observations faites au Nord du Brésil, et, par Eddington, dans une île du Golfe de Guinée, révélèrent effectivement un déplacement du sens et de l'ordre de grandeur prévus. D'autres observations furent faites depuis. On s'accorde actuellement à penser qu'un déplacement de l'ordre de la seconde existe, sans qu'il soit possible toutefois de dire si oui ou non il obéit rigoureusement à la formule d'Einstein [2].

Revenons pour finir sur la question du diamètre apparent du Soleil : nous avons dit que ce diamètre devait nous apparaître un peu plus grand que si la lumière se propageait en ligne droite : de fait au lieu de voir dans sa vraie direction un point lumineux du bord du Soleil nous le voyons dans la direction de l'asymptote à la trajectoire d'un rayon qui venant d'une étoile frôlerait juste le Soleil. L'augmentation de la moitié du diamètre apparent est donc égale à la distance qui sépare l'intersection I des asymptotes du périhélie P de la courbe. Mais on peut établir en calculant le rayon de courbure de la courbe en ce point P que cette distance est seulement de l'ordre du kilomètre ; l'erreur commise en admettant la propagation rectiligne n'est que de 1 kilomètre sur 700.000 environ ; elle est donc bien comme nous le disions tout à fait négligeable par rapport à nos erreurs de mesure.

118. Mouvement d'un point matériel soumis à l'action d'une seule masse et avance du périhélie de Mercure. — La troisième

---

[1] Disons cependant que Courvoisier avait affirmé dès 1904 que les étoiles éprouvaient un léger éloignement radial par rapport à la position du Soleil quand on comparait les observations de jour aux observations de nuit ; comme cette déviation était à peu près proportionnelle à la distance angulaire des étoiles au Soleil, on l'avait attribuée à une réfraction des rayons lumineux dans une atmosphère entourant le Soleil, et de densité décroissante à partir de l'astre.

[2] Voir F. Croze : *Les Preuves expérimentales de la Relativité*, p. 11-22. Et G. Darmois : *La théorie einsteinienne de la gravitation*, p. 22-25.

conséquence de la théorie d'Einstein que nous ayons à déduire est la loi du mouvement d'un point matériel dans le champ d'une seule masse. C'est là non seulement un problème qui se pose logiquement ; c'est aussi un problème qui présente un grand intérêt au point de vue historique et critique.

En effet ledit mouvement serait en Astronomie celui d'une planète assez petite et supposée seule en présence du Soleil ; sans doute toutes les planètes contribuent avec le Soleil à déterminer le mouvement de chacune ; cependant étant donné le mouvement observable d'une d'entre elles on peut calculer l'influence de toutes les autres, obtenir après correction de ces influences perturbatrices le mouvement dû au Soleil, et voir si le mouvement résiduel ainsi obtenu est d'accord avec le mouvement théorique.

Or en étudiant de cette façon le mouvement de Mercure on avait dû constater, depuis le milieu du XIX[e] siècle, un écart assez sensible entre les prévisions du calcul et les observations : d'après la loi de Newton l'orbite elliptique d'une planète aurait dans son plan une orientation fixe par rapport aux étoiles si la planète était soumise à la seule attraction du Soleil ; les actions des autres planètes, étant donné que tous les mouvements planétaires sont de même sens, font que cette orientation subit une variation séculaire, c'est-à-dire que le *périhélie*, par exemple, de la planète *avance* constamment dans le sens du mouvement. Pour Mercure l'avance observée est d'environ 573″ d'arc par siècle. Mais l'avance calculée d'après les perturbations ne devrait être que de 530″ environ ; d'où une avance supplémentaire d'environ 43″ par siècle : ceci d'après les évaluations les plus communément admises. Tel est le désaccord constaté. Il n'y avait pas moyen d'ailleurs d'y voir le résultat de l'imprécision des observations ou des calculs, car l'évaluation des chances d'erreur montrait que l'écart était nettement plus grand que son erreur probable. Aussi avait-on cherché à l'expliquer autrement que par la loi de Newton pure et simple. Nous n'avons pas à insister ici sur les nombreuses hypothèses qui furent proposées dans ce but ; mais nous devons retenir le fait qu'il y avait là un problème demeuré sans solution satisfaisante [1].

---

[1] Voir sur cette question : Jean Chazy : *La théorie de la Relativité et la Mécanique céleste*, t. I, p. 163-228.

Cela étant on comprend l'intérêt que présentait la détermination rigoureuse du mouvement d'un point matériel dans le champ d'une seule masse d'après la loi d'Einstein. Nous allons simplement indiquer la marche suivie pour résoudre le problème, après quoi nous dirons comment la solution obtenue permet d'expliquer l'avance du périhélie de Mercure.

Il s'agit du mouvement d'un point matériel de masse négligeable par rapport à la masse qui crée le champ, de telle sorte que le point ne modifie pas le champ par lui-même et suive une géodésique de l'E. T. déformé par la masse. Donc il faut déduire du ds^2 de Schwarzschild les équations des géodésiques de l'E. T. correspondant.

On peut simplifier le ds^2 en choisissant les coordonnées θ et φ telles que la vitesse initiale du point matériel soit dans le plan $\theta = \frac{\pi}{2}$, ce qui permet de conclure que l'orbite ne sortira pas de ce plan ; d'écrire par ailleurs $\sin \theta = 1$, $\cos \theta = 0$, $d\theta^2 = 0$ et de réduire le ds^2 à la forme

$$ds^2 = \frac{dr^2}{\gamma} + r^2 d\varphi^2 - \gamma c^2 dt^2.$$

L'application à ce ds^2 de la formule générale des géodésiques conduit à l'expression, sous la forme de deux équations différentielles, de géodésiques contenues dans le plan $\theta = \frac{\pi}{2}$; et l'intégration de ces équations donne, après quelques transformations, la relation suivante entre les deux variables r et φ ou leurs dérivées par rapport à s, les constantes déjà connues c, G et M, et deux constantes d'intégration, h et k :

(1) $$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = k^2 - 1 + \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{2GM}{c^2}\frac{h^2}{r^3},$$

avec la condition

(2) $$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = h.$$

Pour interpréter ces équations, comparons-les avec les équations classiques, en coordonnées polaires, du mouvement d'un point matériel mis en présence d'un centre attirant fixe, où est l'origine des coordonnées, le mouvement étant relatif à un système d'inertie lié au centre.

Si nous désignons comme ci-dessus le temps classique par T et la distance classique radiale par L ces équations sont

$$(1') \qquad \left(\frac{d\mathrm{L}}{d\mathrm{T}}\right)^2 + \mathrm{L}^2\left(\frac{d\varphi}{d\mathrm{T}}\right)^2 = -\frac{\mathrm{GM}}{a} + \frac{2\mathrm{GM}}{\mathrm{L}},$$

$$(2') \qquad \text{et} \qquad \mathrm{L}^2\frac{d\varphi}{d\mathrm{T}} = \mathrm{H},$$

a représentant le demi-grand axe de l'orbite, et H la constante des aires.

Au premier membre de l'équation nouvelle (1) nous avons des termes en $\frac{dr}{ds}$ et $r\frac{d\varphi}{ds}$ au lieu des termes $\frac{d\mathrm{L}}{d\mathrm{T}}$ et $\mathrm{L}\frac{d\varphi}{d\mathrm{T}}$ qui dans l'équation classique exprimaient les vitesses du point dans le sens radial et dans le sens transversal. Mais nous savons que dans tout petit intervalle on a $ds = cd\tau$ si l'on appelle τ le temps propre du point mobile ; d'où les termes en $\frac{dr}{ds}$ et $\frac{d\varphi}{ds}$ expriment eux aussi les deux vitesses du point en fonction de son temps propre multiplié par la constante c ; le remplacement de ds par $cd\tau$ mettrait d'ailleurs en évidence, au dénominateur de tous les termes connus de l'équation, le facteur c^2.

La comparaison des deux seconds membres nous montre qu'au facteur c^2 près le terme $\frac{2\mathrm{GM}}{c^2r}$ de (1) est identique au deuxième terme classique $\frac{2\mathrm{GM}}{\mathrm{L}}$; que, le troisième terme $\frac{2\mathrm{GM}}{c^2}\frac{h^2}{r^3}$ ne pouvant être identifié avec le premier terme classique, qui est indépendant de L, c'est le premier terme de (1), $k^2 - 1$, qu'il faut rapprocher de ce premier terme classique, en posant

$$k^2 - 1 = -\frac{\mathrm{GM}}{c^2a}, \qquad \text{ou} \qquad k^2 = 1 - \frac{2\mathrm{GM}}{c^2a},$$

c^2 étant introduit pour des raisons d'homogénéité ; et qu'enfin le troisième terme, $\frac{2\mathrm{GM}}{c^2}\frac{h^2}{r^3}$, est un terme additionnel qui exprime la différence entre le nouveau mouvement et le mouvement classique.

Quant à l'équation $r^2\frac{d\varphi}{ds} =$ constante, elle ne fait qu'exprimer une nouvelle loi des aires, vraie relativement au temps propre $d\tau = \frac{ds}{c}$ du point attiré.

En tenant compte de l'équation (2) qui nous donne

$$h^2 = r^4\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 \qquad \text{ou} \qquad \frac{h^2}{r^3} = r\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2,$$

nous pouvons écrire l'équation (1)

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = -\frac{\mathrm{GM}}{c^2 a} + \frac{2\mathrm{GM}}{c^2 r} + \frac{2\mathrm{GM}}{c^2}\, r\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2.$$

Si nous remplaçons L par r et T par τ dans l'équation classique, elle serait

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = -\frac{\mathrm{GM}}{a} + \frac{2\mathrm{GM}}{r}.$$

La nouvelle équation du mouvement ne diffère de l'ancienne que par la présence de c^2 au dénominateur de tous les termes — puisque $ds = c d\tau$ — et par le terme additif

$$\frac{2\mathrm{GM}}{c^2}\, r\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2.$$

Ce sont là les équations différentielles du mouvement ; pour savoir ce qu'il en est de l'orientation dans son plan de l'orbite, et éventuellement de l'avance du périhélie, il faut déduire de ces équations celle de la trajectoire. Voyons le résultat de cette déduction d'abord à partir de l'équation classique du mouvement, ensuite à partir de l'équation nouvelle.

En mécanique classique on élimine $d\mathrm{T}$ entre les équations (1′) et (2′), ce qui donne l'équation différentielle de la trajectoire sous la forme d'une relation entre L, dL et $d\varphi$. L'intégration de cette équation donne sous forme finie la trajectoire : c'est une conique, et c'est une ellipse quand sont réalisées certaines conditions de vitesse initiale. Alors l'équation est la suivante :

$$\frac{1}{\mathrm{L}} = \frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{H}^2}\,[1 + e\cos(\varphi - \omega)]\,; \tag{3′}$$

où e et ω sont deux constantes d'intégration qu'on identifie, e avec l'excentricité de l'ellipse, et ω avec la longitude du périhélie, c'est-à-dire avec l'angle que fait avec la direction origine le rayon vecteur de la planète quand elle est le plus près du Soleil.

La constance de l'angle ω exprime la fixité du périhélie par rapport à l'origine, et celle de l'ellipse dans le système d'inertie

lié au centre attirant, ou pour une planète dans le système d'inertie stellaire.

A partir des équations nouvelles on suit la même marche : on élimine ds entre (1) et (2) ; et l'on obtient l'équation différentielle de la trajectoire comme relation entre r, dr et $d\varphi$; les angles φ étant comme nous l'avons dit identiques aux angles φ classiques, quand on se réfère au système d'inertie stellaire et à des coordonnées d'espace polaires ayant pour origine le centre du Soleil.

Il s'agit d'intégrer cette équation. On procède par approximations, et pour cela on s'appuie sur la petitesse relative de termes qu'on calcule en donnant à r la valeur classique L, ce qui est légitime d'après ce que nous avons dit précédemment.

Le résultat final est celui-ci :

$$(3) \qquad \frac{1}{r} = \frac{GM}{c^2h^2}\left[1 + e\cos(\varphi - \omega) + \frac{3G^2M^2}{c^4h^2}e(\varphi - \omega)\sin(\varphi - \omega)\right].$$

Cette équation est encore presque celle d'une ellipse, le terme additif en $\frac{3G^2M^2}{c^4h^2}$ étant très petit par rapport aux autres à cause de la présence de c^4 au dénominateur. On peut donc encore considérer e comme représentant à peu près l'excentricité.

Pour savoir ce que signifie le terme additif par rapport à la direction du périhélie il faut l'exprimer en fonction de l'angle ω ; or si l'on pose

$$\delta\omega = \frac{3G^2M^2}{c^4h^2}(\varphi - \omega),$$

on peut, en négligeant $\delta\omega^2$, écrire l'équation sous la forme

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{c^2h^2}[1 + e\cos(\varphi - \omega - \delta\omega)];$$

de laquelle on conclut que quand le rayon vecteur de la planète décrit un angle $\varphi - \omega$, la longitude ω du périhélie s'accroît d'une fraction de $\varphi - \omega$:

$$\delta\omega = \frac{3G^2M^2}{c^4h^2}(\varphi - \omega).$$

Quand la planète aura fait une « révolution », c'est-à-dire quand le rayon vecteur aura décrit un angle $\varphi - \omega$ un peu supérieur à

2π [1], le périhélie aura avancé d'un angle $\Delta\omega$ un peu plus grand que $\frac{3G^2M^2}{c^4h^2} \times 2\pi$; en tout cas on a à très peu près :

$$\Delta\omega = \frac{6\pi G^2 M^2}{c^4 h^2}.$$

Pour calculer cet angle il faut exprimer h, qui représente la nouvelle constante des aires, en fonction de quantités déjà connues. Le calcul se fait d'après l'équation (1), et d'après la relation classique, toujours à peu près valable, entre l'ancienne constante, et les quantités M, a et e.

Le résultat est $h^2 = \frac{GM}{c^2} a\,(1 - e^2)$; d'où pour $\Delta\omega$ la valeur

$$\frac{6\,\pi\, G^2 M^2 c^2}{c^4 G M a\,(1 - e^2)} = \frac{6\pi G M}{c^2 a\,(1 - e^2)}.$$

Telle est à très peu près l'avance par révolution du périhélie ; pour la calculer approximativement dans le cas de Mercure, décomposons le produit $\frac{6\pi GM}{c^2 a(1 - e^2)}$ en deux facteurs :

$$\Delta\omega = \frac{2GM}{c^2 a} \cdot \frac{3\pi}{1 - e^2}.$$

En admettant pour a la distance moyenne de Mercure que nous avons admise précédemment, 6.10^7 km. le premier facteur a la valeur déjà indiquée : $0{,}5.10^{-7}$ (nº 114).

L'excentricité e de Mercure étant égale à 0,2 environ, e^2 vaut 0,04 et $1 - e^2$, 0,96 ; d'où pour le second facteur la valeur

$$\frac{3\pi}{0{,}96} \sim \frac{9{,}5}{0{,}96} \sim 10.$$

On a donc finalement $\Delta\omega = 0{,}5.\,10^{-7} \times 10 = 0{,}5.10^{-6}$ radians. Comme π ou 3,14 radians valent 180º ou 648.000″, on a

$$\Delta\omega = \frac{648 \cdot 000 \times 0{,}5 \cdot 10^{-6}}{3{,}14} \sim 2 \cdot 10^5 \times 0{,}5 \cdot 10^{-6} \sim 0''1.$$

---

[1] Si l'on part de midi, la grande aiguille d'une horloge ne rattrape pas la petite après un tour plus $\frac{1}{12}$ de tour exactement, mais après un tour plus $\frac{1}{12}$, plus $\frac{1}{12^2}$, plus $\frac{1}{12^3}$, et ainsi de suite, soit en tout un tour plus $\frac{1}{11}$ de tour. C'est l'angle égal à $\frac{1}{11}$ de tour qui correspondrait à l'avance exacte du périhélie ; l'angle $\frac{1}{12}$ de tour correspond à l'avance approchée $\Delta\omega$.

Dans le cas de la planète la différence des 2 fractions supplémentaires est absolument négligeable.

Telle est en secondes d'arc l'avance par révolution du périhélie. Une révolution de Mercure dure à peu près 88 jours, et il y en a en un siècle, c'est-à-dire en 36.525 jours,

$$\frac{36525}{88} \backsim 410.$$

D'où l'avance par siècle du périhélie est d'à peu près $410 \times 0{,}1 = 41''$ d'arc.

Le calcul exact donne $42''9$.

Comme au point de vue direction il y a coïncidence des coordonnées ϑ et φ de Schwarzschild et des coordonnées ϑ et φ classiques, et que les deux trajectoires sont situées dans le plan $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, les rotations $\Delta\varphi$, et $\Delta\omega$, des équations de Schwarzschild appliquées à la planète Mercure devraient pouvoir s'observer du centre du Soleil à condition qu'on se réfère aux étoiles. Mais c'est précisément en se référant par la pensée aux étoiles vues du centre du Soleil qu'on a observé l'avance du périhélie ; donc le résultat de Schwarzschild peut être considéré comme expliquant l'avance constatée [1].

Ce n'est pas seulement le périhélie de Mercure qui doit d'après la théorie nouvelle subir une avance séculaire : toutes les planètes en tant que soumises à l'influence du Soleil obéissent à la même loi de mouvement que Mercure ; mais la présence du demi-grand axe a au dénominateur de l'expression de $\Delta\omega$ fait que plus la planète est éloignée du Soleil plus l'avance par révolution est petite ; le fait que l'excentricité des orbites est plus faible pour les autres planètes que pour Mercure contribue aussi à diminuer $\Delta\omega$, en même temps qu'il rend plus difficile à fixer les passages aux périhélies ; enfin les périodes de révolution croissant avec la distance au Soleil le nombre des révolutions par siècle est plus petit ; si bien que les avances séculaires à prévoir des périhélies sont bien moins importantes dans tous les autres cas que dans le cas de Mercure : pour la Terre par exemple l'avance calculée est inférieure à $4''$ d'arc par siècle [2].

En tout cas, quoi qu'il en soit de la réalité des avances pour les autres planètes, il est sûr que le résultat obtenu pour Mercure constitue à lui seul un éclatant succès de la théorie d'Einstein.

---

(1) J. Chazy : *ibidem*, p. 228-229.
(2) *Ibid.*, p. 230.

119. L'Univers en expansion et le déplacement vers le rouge du spectre des nébuleuses lointaines. — La théorie de la gravitation d'Einstein a reçu depuis sa découverte des développements dont nous n'avons pas l'intention de parler, notre dessein n'exigeant rien d'autre que la connaissance des principes de la théorie et de son accord avec les faits. Pourtant nous voudrions dire quelques mots d'une conception nouvelle de l'Univers dans son ensemble, qui s'est substituée depuis quelques années à la conception einsteinienne de l'espace fermé à rayon invariable : il s'agit de la théorie de « l'Univers en expansion ». Au reste si nous parlons de cette théorie dans cet article consacré aux vérifications expérimentales, c'est justement parce qu'elle paraît apte à fournir d'un fait étrange une explication simple et inattendue.

Voyons d'abord brièvement en quoi consiste la théorie. Nous avons dit plus haut (nº 103) que l'hypothèse de de Sitter sur la structure d'ensemble de l'Univers entraînait pour nous, à cause de la courbure du temps, un allongement apparent des périodes lumineuses émises par des astres très éloignés : cette conséquence présentait un grand intérêt, parce que certaines raies du spectre des nébuleuses les plus lointaines, qu'on pouvait identifier avec telles ou telles raies terrestres, paraissaient en fait systématiquement déplacées vers le rouge. Lanczos, en 1922, fit remarquer que l'Univers de de Sitter pouvait être considéré comme un Univers d'Einstein, à temps rectiligne, mais de rayon variable au cours du temps ; ce qui rendait plus intuitif — nous le montrerons tout à l'heure — le corollaire dont nous venons de parler. Cette idée d'une variation du rayon de l'Univers fut exploitée séparément par Friedmann puis par l'abbé Lemaître ; et c'est elle qui est à la base de la théorie de l'Univers en expansion.

Dans son équation modifiée de la gravitation,

$$E_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}E + \lambda g_{\mu\nu} = - \varkappa T_{\mu\nu},$$

Einstein avait admis que la courbure d'ensemble de l'espace, λ, et par conséquent aussi le rayon de courbure R — égal au rayon de l'Univers puisque celui-ci est l'analogue à trois dimensions d'une surface sphérique — étaient constants au cours du temps cosmique t ; aussi le ds^2 qu'il avait déduit de cette condition et de sa formule ne contenait-il la variable t dans les coefficients d'aucun de ses termes.

Lemaître admit la possibilité d'un ds^2 dont le terme global d'espace contiendrait le rayon R de l'Univers, et la densité moyenne ρ de la matière, comme fonctions de t, c'est-à-dire non plus comme des quantités constantes, mais comme des quantités variables au cours du temps cosmique : seule la masse de la matière était constante (1).

Un tel ds^2 comprenait celui d'Einstein à titre de cas particulier, de la même façon que par exemple lorsqu'on étudie le mouvement d'un pendule en cherchant comment l'angle θ, que fait le fil avec la verticale, varie en fonction du temps, on peut dire que la solution θ = constante — ou plutôt que les deux solutions d'équilibre $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ — sont solutions de l'équation générale du mouvement. Mais de même encore que dans le cas du pendule l'une de ces deux solutions, $\theta = \pi$, correspond à un équilibre instable, la solution même d'Einstein, R = constante, correspondait du point de vue dynamique à un état instable de l'Univers ; c'est-à-dire que le rayon R devait, au lieu d'osciller autour d'une valeur donnée, tendre à s'écarter de plus en plus de cette valeur dès qu'il aurait commencé de le faire pour une raison quelconque.

Supposons que le rayon R ait commencé de *grandir* à partir d'un instant donné : il doit d'après les hypothèses admises continuer de grandir depuis, tout au moins jusqu'à une nouvelle valeur d'équilibre : l'*Univers doit être en expansion*. Pour nous faire une idée d'un tel Univers, supposons-le réduit à une seule dimension d'espace, et d'ailleurs à courbure spatiale constante : son espace sera donc à tout moment une circonférence de cercle ; mais au cours du temps le rayon R de ce cercle ira en croissant.

L'E. T. à deux dimensions correspondant à notre Univers simplifié aura par exemple pour représentation géométrique la surface d'une sphère (fig. 19) ; les méridiens ot sont les lignes de temps des points au repos, et les parallèles p_1, p_2.., etc., représentent l'espace aux instants t_1, t_2.., etc.

Considérons sur le parallèle p_1 une origine o_1 constituée par un point matériel au repos — et un autre point P, au repos relati-

(1) G. Lemaître : *Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extragalactiques*, Ann. de la Soc. scient. de Bruxelles, t. XLVII (1927), fascicule A., p. 49-59.

vement à l'origine, et situé en P_1 à une distance r_1 de o_1 ; le repos signifie pour les deux points l'absence de tout mouvement propre par rapport à la circonférence p_1.

Passons maintenant au parallèle p_2, qui représente l'espace à l'instant t_2 : la distance r_2 des deux points aura grandi, et sera devenue $r_2 = \overline{o_2P_2}$. Par rapport à l'origine o tout se passera comme

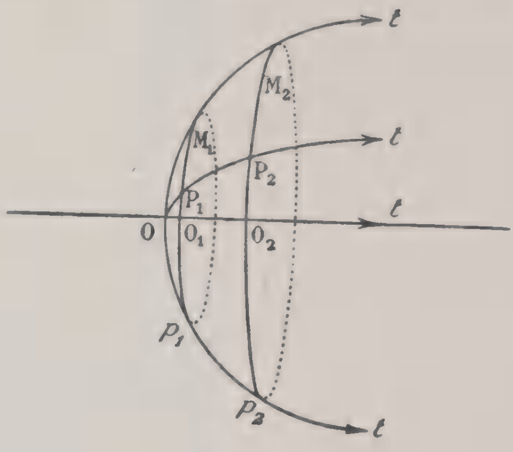

Fig.19.

si le point P s'était *éloigné* avec une certaine vitesse égale au quotient de $\Delta r = r_2 - r_1$, par $\Delta t = t_2 - t_1$. Si au lieu du point P nous avions considéré un autre point M_1 situé d'abord par exemple à une distance $3r_1$ de o_1, il se serait trouvé à l'instant t_2 à une distance $3r_2$ de o_2, et tout se serait passé comme si ce point M s'était éloigné de o avec une vitesse trois fois plus grande que le point P, puisque pour un même temps Δt l'accroissement de distance $\Delta r = 3\,(r_2 - r_1)$ serait trois fois plus grand que pour le point P.

Ainsi ces vitesses d'éloignement apparentes à partir de l'origine, vitesses qu'on pourrait appeler *vitesses d'expansion*, pour les distinguer des vitesses propres dues à la gravitation ou à d'autres causes, sont proportionnelles à la distance du point considéré. D'ailleurs ce que nous avons dit de l'origine o est évidemment vrai d'un autre point au repos quelconque. Donc dans notre Univers en expansion simplifié toutes les particules matérielles dépourvues de vitesses propres s'éloignent de l'une quelconque d'entre elles avec des vitesses d'expansion proportionnelles à la distance où elles se trouvent de cette particule origine à un même instant donné, exactement comme il arrive dans un solide isotrope en train de se dilater uniformément. Si les particules con-

sidérées avaient des mouvements propres réels, leur vitesse d'expansion se composerait bien entendu avec leur vitesse propre ; mais il suffirait que la vitesse d'accroissement du rayon R de notre espace soit assez grande pour que, étant donnés des corps suffisamment éloignés les uns des autres à un moment déterminé, leur vitesse d'expansion l'emporte toujours sur leurs vitesses réelles, et que tous ces corps s'éloignent constamment les uns des autres.

Or toutes ces conclusions, que notre image simplifiée n'avait pour but que de rendre intuitives, valent pour l'Univers de Lemaître ; et c'est justement sur ce point de l'éloignement progressif de tous les corps qui ne sont pas à un moment donné trop proches les uns des autres que la théorie paraît bien se trouver confirmée par certains faits d'observation.

En photographiant le spectre de certaines nébuleuses spirales, on avait remarqué depuis 1919 que certaines des raies de leur spectre, heureusement identifiables avec certaines raies terrestres, se trouvaient décalées vers le rouge. On sait que les nébuleuses spirales, qu'on assimile à notre galaxie, c'est-à-dire à cet ensemble d'étoiles qui constitue la voie lactée et dont notre Soleil fait partie, sont les astres les plus éloignés de nous, diverses méthodes permettant d'évaluer leurs distances. Pour exprimer ces distances, qui sont énormes, on a créé une unité de longueur très grande, le parsec — abréviation de parallaxe-seconde — : c'est la distance à laquelle le demi-grand axe de l'orbite terrestre serait vu sous un angle de 1″ : un parsec vaut plus de 3.10^{18} cm. ; et la lumière met un peu plus de trois années un quart à le parcourir.

On a pu situer assez exactement une dizaine de nébuleuses dont les distances par rapport à nous s'échelonnent entre un million et quarante millions de parsecs (1).

Si les spectres de ces astres lointains avaient présenté des raies déplacées pour les uns vers le rouge et pour les autres vers le violet on aurait pu à la rigueur interpréter les déplacements comme un effet Doppler véritable, c'est-à-dire comme l'effet de vitesses réelles d'éloignement ou de rapprochement des nébuleuses par rapport à notre galaxie.

---

(1) H. Mineur : *L'Univers en expansion*, 1 brochure, Paris, 1933, p. 18.

Mais le fait que tous les déplacements ont lieu vers le rouge rend difficile cette interprétation ; il faudrait admettre que toutes les nébuleuses sont en train — ou du moins étaient en train lors de l'émission de la lumière que nous en recevons actuellement — de s'éloigner réellement de nous sous l'influence de la gravitation par exemple, ce qui ne se conçoit guère. Du reste une autre circonstance rendait le fait plus mystérieux encore : à savoir que le déplacement des raies est à peu près proportionnel à la distance des nébuleuses. Si l'on avait voulu l'interpréter comme un effet Doppler proprement dit, il eût fallu attribuer aux nébuleuses dont nous avons parlé des vitesses d'éloignement allant de 600 km. par seconde pour les plus proches à 20.000 km. par seconde environ pour les plus lointaines.

Comment s'expliquer cette proportionnalité étrange s'il s'agissait de vitesses propres, et comment admettre des vitesses radiales d'éloignement de 20.000 km. par seconde ?

Ce qui paraissait si mystérieux, la théorie de Lemaître permet de le comprendre : dans un Univers en expansion, tout se passe, avons-nous dit, comme si tous les corps s'éloignaient de chacun d'entre eux avec des vitesses proportionnelles à leur distance au corps pris pour origine. Admettons que réellement notre Univers soit en train de se dilater, au moins depuis l'époque où fut émise la lumière qui nous arrive des nébuleuses spirales ; le résultat de cette dilatation sur le spectre de ces nébuleuses sera le même que s'il s'agissait pour elles de vitesses propres d'éloignement proportionnelles à leurs distances ; c'est-à-dire que les raies de leurs spectres seront toutes déplacées vers le rouge et d'autant plus que la nébuleuse émettrice sera plus éloignée, ce que l'on observe en effet.

Restait à voir si cette explication était susceptible de se traduire par des relations numériques correspondant aux données réelles. Les éléments du problème qu'on peut évaluer sont la densité moyenne, ρ, de la matière de l'Univers ; les distances D et les vitesses d'expansion V des nébuleuses spirales ; le rayon actuel R de l'Univers, la vitesse d'expansion de ce rayon $\frac{\Delta R}{\Delta t}$.

La théorie établit des relations entre ces diverses quantités : disons simplement que ces relations ne sont contredites par aucune des évaluations séparées des grandeurs dont il s'agit, en par-

ticulier celles de la densité moyenne ρ et du rayon actuel R, dont les valeurs les plus probables seraient

$$\rho = 3 \cdot 10^{-27} \text{ unités C. G. S.}; \qquad \text{et} \qquad R = 10^9 \text{ parsecs};$$

la vitesse d'expansion de l'Univers étant telle dans ces conditions que le rayon R mettrait environ deux milliards d'années à passer du simple au double (1).

Ainsi il n'y a aucun désaccord entre les exigences de la théorie de Lemaître et les évaluations des différentes grandeurs mesurables relatives à la structure d'ensemble de l'Univers ; il y a de plus accord positif entre l'expansion de l'Univers admise par cette théorie et le déplacement vers le rouge des raies émises par les nébuleuses. Ce déplacement paraissant difficile à expliquer autrement, on est en droit de regarder comme valable l'explication qu'en fournit l'hypothèse de l'Univers en expansion ; et c'est un succès de plus à l'actif de la théorie de la gravitation d'Einstein, dont la théorie de Lemaître n'est qu'un prolongement.

(1) H. Mineur, *ibidem*, p. 31-33.

TABLE DES MATIÈRES

Théorie relativiste de la gravitation

ERRATUM

Page 297 (V-17), l. 21 et suivantes, *au lieu de* : covariante, *lire* : ordinaire ; *puis supprimer la phrase* : Or nous savons ... galiléennes.

Page 319 (V-39), l. 12, *au lieu de* : cos φ, *lire* : cos θ.

Page 320 (V-40), l. 9-10, *au lieu de* : les termes $d\theta^2$ et $d\varphi^2$ eux-mêmes qui paraissent ..., *lire* : $r^2 \sin^2 \theta$, qui par son coefficient paraît.

Page 320 (V-40), l. 12, *au lieu de* : ces termes, *lire* : $\sin^2 \theta$.

Page 320 (V-40), l. 18, *au lieu de* : garder $d\theta^2$ ..., *lire* : garder $\sin^2 \theta$, $d\theta^2$...

Page 321 (V-41), l. 20, *au lieu de* : $g_{44} = e^n$, *lire* : $g_{44} = - e^n$.

Saint-Amand (Cher), France. — Imprimerie R. Bussière. — 8-3-1937.

Saint-Amand (Cher). — Imprimerie R. Bussière.